高三数学考试参考答案

1. D　因为 $B=\{x|x^2-2x-3<0\}=\{x|-1<x<3\}$,$A=\{-2,-1,0,1,2\}$,所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$.

2. C　因为命题“对于任意正数 x,都有 $x+1>0$”是全称量词命题,所以其否定为“存在正数 x,使得 $x+1\leqslant 0$”.

3. A　若$[a]=[b]$,则$|a-b|<1$,但当$|a-b|<1$时,$[a]$,$[b]$不一定相等,例如 $a=2.9$,$b=3.1$,所以“$[a]=[b]$”是“$|a-b|<1$”的充分不必要条件.

4. A　该扇形的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{40^\circ}{180^\circ}\times\pi\times 9^2=9\pi$.

5. D　由题可知,函数 $f(x)$的定义域为$\{x|x\neq\pm1\}$,且 $f(-x)=\frac{x^2}{3-3^{|x|}}=f(x)$,故函数为偶函数,排除 A,C. 又 $f(2)=\frac{4}{3-9}=-\frac{2}{3}<0$,所以选 D.

6. D　由 $2\tan^2\alpha-\tan\alpha-1=0$,解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$或 $\tan\alpha=1$. 因为 α 是第四象限角,所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$,故$\frac{\cos(2\pi-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)}{3\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+\cos(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{-3\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{-3\tan\alpha+1}=\frac{3}{5}$.

7. C　由 $f(x+2)=\frac{3}{f(x)}$,可得 $f(x+4)=f(x)$,所以 $f(x)$的周期为 4,则 $f(100)=f(0)=\frac{3}{f(2)}=-3$.

8. C　由题可知$\frac{T}{2}<\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{3T}{2}$,解得 $1<\omega\leqslant 3$,$\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}<\omega x+\frac{\pi}{5}<\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}$.

因为函数 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{5})$在区间$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$上恰有两个零点,所以$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}<\frac{3\pi}{2},\\ \frac{5\pi}{2}<\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}\leqslant\frac{7\pi}{2}\end{cases}$或

$\begin{cases}\frac{3\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}<\frac{5\pi}{2},\\ \frac{7\pi}{2}<\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{5}\leqslant\frac{9\pi}{2},\end{cases}$解得$\frac{23}{15}<\omega\leqslant\frac{11}{5}$或$\frac{13}{5}\leqslant\omega\leqslant\frac{43}{15}$,即 $\omega\in(\frac{23}{15},\frac{11}{5}]\cup[\frac{13}{5},\frac{43}{15}]$.

9. ABC　函数 $f(x-2)$中的 x 需满足$-3\leqslant x-2\leqslant 3$,解得$-1\leqslant x\leqslant 5$,故函数 $f(x-2)$的定义域为$[-1,5]$. 函数$\frac{f(3x)}{x-1}$中的 x 需满足$\begin{cases}-3\leqslant 3x\leqslant 3,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$解得$-1\leqslant x<1$,故函数$\frac{f(3x)}{x-1}$的定义域为$[-1,1)$.

函数 $f(x-2)$和 $f(2x)$的值域都为$[-3,3]$. 故选 ABC.

10. BD　因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$,则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$,即 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{7}$,

所以 $\tan\alpha=\tan[(\alpha+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{4}]=\dfrac{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})\tan\frac{\pi}{4}}=-\frac{3}{4}$，故选 BD.

11. ACD　$3a=3\log_5 3=\log_5 27>2$，$3b=3\log_{12}5=\log_{12}125<2$，所以 $3a>2>3b$，即 $b<c<a$. 易得 $d<0$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\log_3 5+\log_3 0.5=\log_3 2.5<1$，所以 $0<\frac{a+d}{ad}<1$，则 $da<a+d<0$，故选 ACD.

12. BC　由 $2x^2-3x-x\ln x+1\geqslant ax+b+(x-2)^2\geqslant 0$，可得 $x^2+x-x\ln x-3\geqslant ax+b\geqslant -x^2+4x-4$. 记 $f(x)=x^2+x-x\ln x-3$，$g(x)=-x^2+4x-4$，

令 $h(x)=f(x)-g(x)=2x^2-3x-x\ln x+1$，$x\geqslant 1$，则 $h'(x)=4x-\ln x-4$，

令 $k(x)=4x-\ln x-4$，则 $k'(x)=4-\frac{1}{x}>0$ 恒成立，

所以 $h'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增且 $h'(1)=0$，所以当 $x\geqslant 1$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=0$，所以 $f(x)\geqslant g(x)$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立. 又 $f'(x)=2x-\ln x$，$g'(x)=-2x+4$，且 $f'(1)=g'(1)=2$，所以直线 $y=ax+b$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的公切线时，才能使原不等式恒成立，此时 $a=f'(1)=2$，$b=-3$，故选 BC.

13. $[0,4)$　当 $k=0$ 时，不等式为 $5>0$，恒成立，符合题意；

当 $k>0$ 时，若不等式 $kx^2-3kx+k+5>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

则 $\Delta=9k^2-4k(k+5)<0$，解得 $0<k<4$；

当 $k<0$ 时，不等式 $kx^2-3kx+k+5>0$ 不能对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

综上，k 的取值范围是 $[0,4)$.

14. $(-1,1)$　令 $y=-1$，则 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(x)<1$ 的解集为 $(-1,1)$.

15. 5　过 C 作 CE 垂直于 MN，交 MN 于点 E(图略). 设 $ME=2x$，则 $CE=7x$，由题可知 $AB=BC=3$，则 $MN=AN=2x+3$，$NB=7x$，在 $\triangle ABN$ 中，$NB^2=AN^2+AB^2-2AN\cdot AB\cdot\cos 120^\circ$，即 $(7x)^2=(2x+3)^2+3^2+3\times(2x+3)$，化简可得 $5x^2-2x-3=0$，所以 $x=1$(负值已舍去)，则 $MN=5$.

16. $\frac{3\pi}{2}-1$　由 $2\sin(\alpha+\beta)+\alpha^2-2\alpha+3=0$，可得 $2\sin(\alpha+\beta)=-\alpha^2+2\alpha-3$. 因为 $-2\leqslant 2\sin(\alpha+\beta)\leqslant 2$，$-\alpha^2+2\alpha-3=-(\alpha-1)^2-2\leqslant -2$，所以当且仅当 $\alpha=1$，$2\sin(\alpha+\beta)=-2$ 时，等式成立. 又因为 $\alpha,\beta\in[0,2\pi]$，所以 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$，故 $\beta=\frac{3\pi}{2}-1$.

17. (1)解：由 $a_1=3$，$a_2=8$，可得 $\frac{a_1}{1}=3$，$\frac{a_2}{2}=4$，…………………………………………………… 1 分

因为 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 3，公差为 1 的等差数列，所以 $\frac{a_n}{n}=3+(n-1)=n+2$，…………… 4 分

所以 $a_n=n^2+2n$. ………………………………………………………………………………… 5 分

(2)证明：$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，…………………………………………………… 7 分

$S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$，…………………………………………………………………………… 9 分

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}>0$，故 $S_n<\frac{1}{2}\times(1+\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$. ………………………… 10 分

18. 解：(1)由 $b\cos C+c\cos B=3a\cos A$，可得到 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=3\sin A\cos A$，……
……………………………………………………………………………………………… 2 分

即 $\sin(B+C)=3\sin A\cos A$. ……………………………………………………………… 3 分

因为 $B+C=\pi-A$，所以 $\sin(B+C)=\sin A\neq0$，

故 $\cos A=\frac{1}{3}$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)由 $\cos A=\frac{1}{3}$，可得 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，…………………………………………………………… 6 分

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以$\sqrt{2}=\frac{1}{2}bc\sin A$，则 $bc=3$. ……………………………… 8 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $4=b^2+c^2-\frac{2}{3}bc=(b+c)^2-\frac{8}{3}bc$，

所以 $b+c=2\sqrt{3}$，……………………………………………………………………… 10 分

故$\triangle ABC$ 的周长是 $a+b+c=2\sqrt{3}+2$. ……………………………………………… 12 分

19. 解：(1)设 A,B,C 分别表示购买的排球来自甲厂、乙厂、丙厂，D 表示购买的排球是合格品，则 $P(A)=40\%$，$P(B)=P(C)=30\%$，$P(D|A)=95\%$，$P(D|B)=92\%$，$P(D|C)=96\%$，所以 $P(D)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)$ ……………………… 2 分

$=40\%\times95\%+30\%\times92\%+30\%\times96\%=94.4\%$. ……………………………………… 4 分

(2)设小李到该市场批发 2 个排球进行销售获得的纯利润为 X 元，

依题意可得 X 的可能取值为 $10+8,10-6,-5+8,-5-6$，即 $18,4,3,-11$，………… 6 分

$P(X=18)=0.95\times0.96=0.912$，………………………………………………………… 7 分

$P(X=4)=0.95\times(1-0.96)=0.038$，…………………………………………………… 8 分

$P(X=3)=(1-0.95)\times0.96=0.048$，…………………………………………………… 9 分

$P(X=-11)=(1-0.95)\times(1-0.96)=0.002$，……………………………………………… 10 分

所以 $E(X)=18\times0.912+4\times0.038+3\times0.048+(-11)\times0.002=16.69$，

故小李到该市场批发 2 个排球进行销售获得的纯利润的数学期望为 16.69 元. …… 12 分

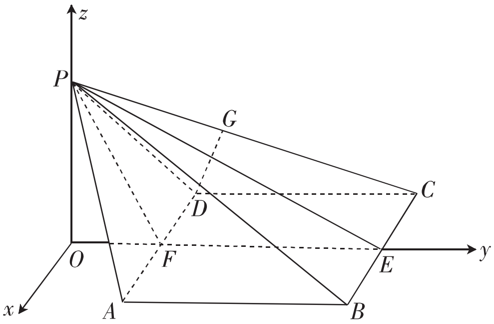
20. (1)证明：如图，取 AD 的中点 F，连接 PF,EF.

∵底面 $ABCD$ 是正方形，$PA=PD$，∴$AD\perp EF$，$AD\perp PF$. ………………………… 1 分

∵$EF\cap PF=F$，$EF,PF\subset$平面 PEF，∴$AD\perp$平面 PEF. …………………………… 2 分

又∵$PE\subset$平面 PEF，∴$AD\perp PE$. …………………………………………………… 3 分

(2)解：由(1)可知，二面角 $P-AD-B$ 的平面角为$\angle PFE$，且为$\frac{2\pi}{3}$，过点 P 作 PO 垂直于直线 EF，垂足为 O. 以 O 为原点，OE，OP 所在的直线分别为 y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



易得$\angle PFO=\frac{\pi}{3}$，$PF=2$，$OF=1$，$PO=\sqrt{3}$，

则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$A(1,1,0)$，$B(1,3,0)$，$C(-1,3,0)$，

$D(-1,1,0)$，…………………………………… 4 分

$\overrightarrow{PA}=(1,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DP}=(1,-1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{PC}=(-1,3,-\sqrt{3})$， …………………………………… 5 分

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}x+y-\sqrt{3}z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$取 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,1)$. …………………………………… 6 分

设$\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PC}=(-\lambda,3\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，则$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PG}=(1-\lambda,3\lambda-1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，… …………………………………… 7 分

设直线 DG 与平面 PAB 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DG},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{DG}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DG}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{\sqrt{(1-\lambda)^2+(3\lambda-1)^2+3(1-\lambda)^2}}=$

$\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{\sqrt{(3\lambda-1)^2+4(1-\lambda)^2}}$， …………………………………… 8 分

令 $t=1-\lambda$，则 $t\in[0,1]$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{\sqrt{(3\lambda-1)^2+4(1-\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{(2-3t)^2+4t^2}}$

$=\sqrt{3}\sqrt{\frac{t^2}{13t^2-12t+4}}$. …………………………………… 9 分

当 $t=0$ 时，$\sin\theta=0$，$\theta=0$；

当 $t\neq0$ 时，$\sin\theta=\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{t^2}-\frac{12}{t}+13}}=\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{4(\frac{1}{t}-\frac{3}{2})^2+4}}$，…………………… 10 分

当$\frac{1}{t}=\frac{3}{2}$，即 $t=\frac{2}{3}$，$\lambda=\frac{1}{3}$时，$\sin\theta$ 取得最大值，且最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时 $\theta=\frac{\pi}{3}$. ………… 11 分

所以直线 DG 与平面 PAB 所成角的最大值为$\frac{\pi}{3}$. …………………………………… 12 分

21. 解：(1)设 $P(x,y)$，因为点 P 到直线 $x=4$ 的距离是它到点 $M(1,0)$的距离的 2 倍，

所以$|x-4|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，则 $x^2-8x+16=4x^2-8x+4+4y^2$， ………………… 3 分

整理得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，故曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………… 5 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$

整理得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$, …………………………………………………… 6 分

则 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$. ………………………………………… 7 分

因为 l 过点$(-1,0)$,所以 $S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}\times2\times|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$

$=\dfrac{12}{3\sqrt{m^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}}$. ………………………………………………………… 9 分

令 $t=\sqrt{m^2+1}$,$t\geqslant1$,$f(t)=3t+\dfrac{1}{t}$,则 $f'(t)=3-\dfrac{1}{t^2}>0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立,则 $f(t)\geqslant$

$f(1)=4$,则$\dfrac{12}{3t+\dfrac{1}{t}}\leqslant3$. ………………………………………………………… 11 分

故$\triangle MAB$ 面积的最大值为 3. ………………………………………………… 12 分

22.(1)解:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\ln x+1+a$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\mathrm{e}^{-a-1}$. … 1 分

由 $f'(x)<0$,解得 $0<x<\mathrm{e}^{-a-1}$,由 $f'(x)>0$,解得 $x>\mathrm{e}^{-a-1}$. ……………………… 3 分

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(0,\mathrm{e}^{-a-1})$,单调递增区间为$(\mathrm{e}^{-a-1},+\infty)$. ……………… 5 分

(2)证明:令 $\varphi(x)=f(x)-a\mathrm{e}^x+1=a(x-\mathrm{e}^x)+x\ln x+1$,

令 $k(x)=x-\mathrm{e}^x$,则 $k'(x)=1-\mathrm{e}^x$,则 $k(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以 $k(x)\leqslant k(0)=-1<0$.

由 $a\geqslant1$,可得 $a(x-\mathrm{e}^x)+x\ln x+1\leqslant x-\mathrm{e}^x+x\ln x+1$, ……………………………… 7 分

即证$\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}-1>0$.

令 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}-1(x>0)$,则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}$. ……

…………………………………………………………………………………………… 8 分

由 $g'(x)=0$,可得 $x=1$($x=0$ 舍去).

因为当 $x>0$ 时,$\mathrm{e}^x-1>0$,

所以当 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(0,1)$上单调递减,

当 $x>1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=\mathrm{e}-1-1=\mathrm{e}-2>0$, ………………………………………………… 10 分

所以 $g(x)>0$,则$\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}-1>0$,所以 $x-\mathrm{e}^x+x\ln x+1<0$,结论成立. ……… 12 分