2011 女子数学奥林匹克

2011 年 8 月 1 日　上午 8:00 ~ 12:00 广东　深圳市第三高级中学

1．求出所有的正整数n，使得关于x, y的方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$

恰有 2011 组满足$x \le y$的正整数解(x, y)．

解：由题设，$xy-nx-ny=0 \Rightarrow (x-n)(y-n)=n^2$．所以，除了 $x=y=2n$ 外，$x-n$ 取n^2的小于n的正约数，就可得一组满足条件的正整数解(x, y)．故n^2的小于n的正约数恰好为 2010．

设$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$，其中$p_1, \cdots, p_k$是互不相同的素数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$是非负整数．故$n^2$的小于$n$的正约数个数为

$$\frac{(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1)-1}{2},$$

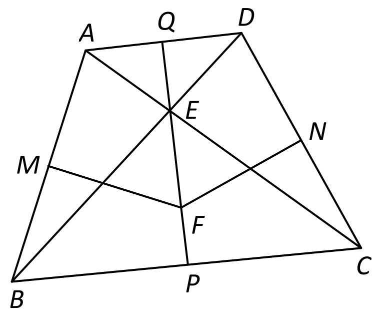
故$(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1)=4021$．

由于 4021 是素数，所以$k=1$，$2\alpha_1+1=4021$，$\alpha_1=2010$．

所以，$n=p^{2010}$，其中p是素数．

2．如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 E，边 AB、CD 的中垂线相交于点 F，点 M、N 分别为边 AB、CD 的中点，直线 EF 分别与边 BC、AD 相交于点 P、Q．

若 $MF \cdot CD = NF \cdot AB$ 且 $DQ \cdot BP = AQ \cdot CP$，求证：$PQ \perp BC$．

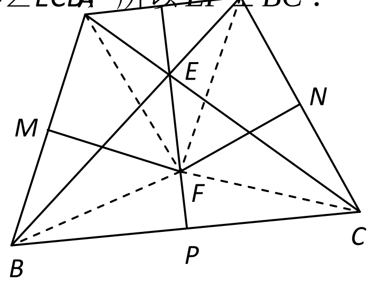


证明：连接 AF、BF、CF、DF．由题目条件可知△AFB 和△CFD 都是等腰三角形，FM 和 FN 分别为这两个等腰三角形底边上的高．由 $MF \cdot CD = NF \cdot AB$，知△$AFB$∽△$DFC$，从而∠$AFB$=∠$CFD$，∠$FAB$=∠$FDC$．

由∠AFB=∠CFD 可得∠BFD=∠CFA，又因 FB=FA，FD=FC，所以△BFD≌△AFC．由此可得∠FAC=∠FBD，∠FCA=∠FDB．从而 A、B、F、E 四点共圆，C、D、E、F 四点共圆．

由上可得∠FEB=∠FAB=∠FDC=∠FEC，即直线 EP 是∠BEC 的角平分线，从而 $EB/EC=BP/CP$．同理，$ED/EA=QD/AQ$．由于 $DQ \cdot BP = AQ \cdot CP$，所以 $EB \cdot ED = EC \cdot EA$．

由此可得 $ABCD$ 为圆内接四边形，且点 F 为其外接圆的圆心．这时，因为∠EBC=$\frac{1}{2}$∠DFC=$\frac{1}{2}$∠AFB=∠ECB，所以 $EP \perp BC$．



3．设正实数a,b,c,d满足$abcd=1$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}\geq\frac{25}{4}.$$

证法一：首先我们证明，当a,b,c,d中有两个相等时，不等式成立．不妨设$a=b$，令$s=a+b+c+d$，则有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}=\frac{2}{a}+\frac{c+d}{cd}+\frac{9}{s}=\frac{2}{a}+a^2(s-2a)+\frac{9}{s}$$

$$=\frac{2}{a}-2a^3+(a^2s+\frac{9}{s}).$$

若$a\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$s=a+b+c+d\geq 2a+\frac{2}{a}\geq\frac{3}{a}$，因此将$s$视为变量，上式最小值在$s=2a+\frac{2}{a}$时取到，此时

$$\frac{2}{a}-2a^3+(a^2s+\frac{9}{s})=\frac{2}{a}-2a^3+a^2(2a+\frac{2}{a})+\frac{9}{s}=\frac{2}{a}+2a+\frac{9}{s}=s+\frac{9}{s}$$

$$=\frac{7}{16}s+\frac{9}{16}s+\frac{9}{s}\geq\frac{7}{16}\times 4+2\sqrt{\frac{9}{16}s\cdot\frac{9}{s}}=\frac{7}{4}+\frac{9}{2}=\frac{25}{4}.$$（这里用到了$s=2a+\frac{2}{a}\geq 4$）

若$0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$，则

$$\frac{2}{a}-2a^3+(a^2s+\frac{9}{s})\geq\frac{2}{a}-2a^3+6a=\frac{2}{a}+5a+(a-2a^3)>\frac{2}{a}+5a$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot 5a}=2\sqrt{10}>\frac{25}{4}.$$

因此当a,b,c,d中有两个相等时，不等式成立．

下面假设a,b,c,d两两不等，不妨设$a>b>c>d$．由于$\frac{ad}{c}\cdot b\cdot c\cdot c=abcd=1$，故由上面的分析得

$$\frac{1}{\frac{ad}{c}}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{9}{\frac{ad}{c}+b+c+c}\geq\frac{25}{4}.$$

下面我们只需证明

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}\ge\frac{1}{\frac{ad}{c}}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{9}{\frac{ad}{c}+b+c+c}.$$

①

而 $①\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}\ge\frac{c}{ad}+\frac{1}{c}+\frac{9}{\frac{ad}{c}+b+2c}$

$$\Leftrightarrow\frac{ac+cd-c^2-ad}{acd}\ge\frac{9}{(a+b+c+d)(\frac{ad}{c}+b+2c)}\cdot(a+d-\frac{ad}{c}-c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-c)(c-d)}{acd}\ge\frac{9}{(a+b+c+d)(\frac{ad}{c}+b+2c)}\cdot\frac{(a-c)(c-d)}{c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{ad}\ge\frac{9}{(a+b+c+d)(\frac{ad}{c}+b+2c)}$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c+d)(\frac{ad}{c}+b+2c)\ge 9ad$$

$\Leftarrow\frac{ad}{c}+b+2c\ge\sqrt{9ad}$ （因为 $a+b+c+d>\frac{ad}{c}+b+2c$ ）

$$\Leftarrow\frac{ad}{c}+3c\ge\sqrt{9ad}.$$

而最后一式可以用均值不等式推出，这样就证明了结论.

证法二：采用调整法.

不妨设 $a\le b\le c\le d$，并记 $f(a,b,c,d)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}$.

先往证：$f(a,b,c,d)\ge f(\sqrt{ac},b,\sqrt{ac},d)$.　　(*)

事实上，上式等价于

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c+d}\ge\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{9}{2\sqrt{ac}+b+d}$$

$\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{ac}\ge\frac{9(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{(a+b+c+d)(2\sqrt{ac}+b+d)}$　　（因为 $(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\ge 0$ ）

$\Leftarrow(a+b+c+d)(2\sqrt{ac}+b+d)\ge 9ac$　　（因为 $b+d\ge 2\sqrt{bd}=\frac{2}{\sqrt{ac}}$ ）

$\Leftarrow \quad (a+c+\frac{2}{\sqrt{ac}})(2\sqrt{ac}+\frac{2}{\sqrt{ac}})\ge 9ac$ ①

而$1=abcd\ge a\cdot a\cdot c\cdot c\Rightarrow ac\le 1\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{ac}}\ge 2\sqrt{ac}$. 且$a+c\ge 2\sqrt{ac}$，故

①左边$\ge (2\sqrt{ac}+\frac{2}{\sqrt{ac}})(2\sqrt{ac}+\frac{2}{\sqrt{ac}})\ge 4\sqrt{ac}\cdot 4\sqrt{ac}=16ac>9a=$①右边. 所以$(*)$成立.

$(*)$说明，$f(a,b,c,d)$（其中$a\le b\le c\le d$）的最小值（或极小值）总是在$a=c$，即$a=b=c$时取得. 欲得到该四元函数的下界，我们就可不妨设$(a,b,c,d)=\left(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t},t^3\right)$，这里$t\ge 1$；这也说明了只需证明对$\forall t\ge 1$，总有

$$f\left(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t},t^3\right)\ge\frac{25}{4}, \qquad (**)$$

就证明了原不等式成立.

代入，可知

$f\left(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t},t^3\right)\ge\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow \quad 3t+\frac{1}{t^3}+\frac{9}{t^3+\frac{3}{t}}\ge\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow \quad 12t^8-25t^7+76t^4-75t^3+12\ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (t-1)^2(12t^6-t^5-14t^4-27t^3+36t^2+24t+12)\ge 0$

$\Leftarrow \quad 12t^6-t^5-14t^4-27t^3+36t^2+24t+12\ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (t-1)(12t^5+11t^4-3t^3-30t^2+6t+30)+42\ge 0$ ②

而$t\ge 1$，$12t^5+6t\ge 2\sqrt{12t^5\cdot 6t}=12\sqrt{2}t^3>3t^3$，

$11t^4+30\ge 2\sqrt{11t^4\cdot 30}=2\sqrt{330}t^2>30t^2$.

故$(t-1)(12t^5+11t^4-3t^3-30t^2+6t+30)+42>0$，②成立.

至此，$(**)$成立，原不等式得证.

4．有 n（$n\geq 3$）名乒乓球选手参加循环赛，每两名选手之间恰比赛一次（比赛无平局）.

赛后发现，可以将这些选手排成一圈，使得对于任意三名选手 A,B,C，若 A,B 在圈上相邻，则 A,B 中至少有一人战胜了 C．求 n 的所有可能值.

解：n 的所有可能值为所有大于等于 3 的奇数．理由如下.

当 n 是大于等于 3 的奇数时，设 $n=2k+1$，n 名选手编号为 $A_1,A_2,\ldots,A_{2k+1}$，构造比赛结果如下：选手 A_i（$1\leq i\leq 2k+1$）战胜了 $A_{i+2},A_{i+4},\ldots,A_{i+2k}$（令 $A_{2k+1+j}=A_j$，$j=1,2,\ldots,2k+1$），输给了其它选手．现在将这些选手按照 $A_1,A_2,\ldots,A_{2k+1}$ 的顺序顺时针排成一圈，对于任意三名选手 A,B,C，若 A,B 在圈上相邻，不妨设 $A=A_t$，$B=A_{t+1}$，$C=A_{t+r}$（$1\leq t\leq 2k+1$，$2\leq r\leq 2k$），则 r 与 $r-1$ 中至少有一个为不大于 $2k$ 的偶数，故 A,B 中至少有一人战胜了 C．因此，当 n 是大于等于 3 的奇数时，可能发生题目所述的情况.

另一方面，当 n 是大于等于 4 的偶数时，假设题目所述的情况出现，将这 n 名选手按照在圈上的位置顺时针记为 $A_1,A_2,\ldots,A_n$，不妨设 A_1 战胜了 A_2，由题目条件知 A_2,A_3 中至少有一人战胜了 A_1，故 A_3 战胜了 A_1，再由 A_1,A_2 中至少有一人战胜 A_3 可知 A_2 战胜了 A_3．依此类推可知对任意 $1\leq i\leq n$，A_i 战胜了 A_{i+1}（其中 $A_{n+1}=A_1$）．对于每个 A_i（$1\leq i\leq n$），他输给了 A_{i-1}（其中 $A_0=A_n$），将剩下 $n-2$ 人两两相邻配对，由条件知 A_i 至少输掉了 $\dfrac{n-2}{2}$ 场，再加上输给 A_{i-1} 的一场至少输掉 $\dfrac{n}{2}$ 场．因此 n 名选手共输掉至少 $\dfrac{n^2}{2}$ 场，但这与 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}<\dfrac{n^2}{2}$ 矛盾！因此当 n 是大于等于 4 的偶数时，不可能发生题目所述的情况.

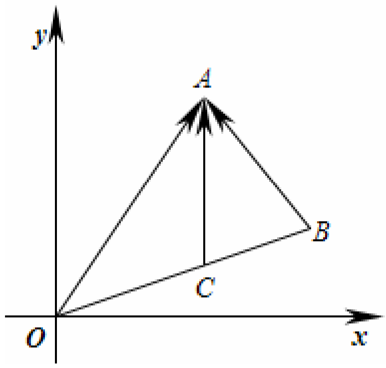
综上所述，n 的所有可能值为所有大于或等于 3 的奇数.

5．给定实数α，求最小实数$\lambda=\lambda(\alpha)$，使得对任意复数z_1,z_2和实数$x\in[0,1]$，若$|z_1|\le\alpha|z_1-z_2|$，则$|z_1-xz_2|\le\lambda|z_1-z_2|$.

解：如图，在复平面内，点A,B,C对应的复数分别为z_1,z_2,xz_2．显然，点C在线段 OB 上．向量$\overrightarrow{BA}$对应的复数为z_1-z_2．向量$\overrightarrow{CA}$对应的复数为z_1-xz_2．由$|z_1|\le\alpha|z_1-z_2|$，得$\left|\overrightarrow{OA}\right|\le\alpha\left|\overrightarrow{BA}\right|$．于是，

$$\left|z_1-xz_2\right|_{\max}=\left|\overrightarrow{AC}\right|_{\max}=\max\left\{\left|\overrightarrow{OA}\right|,\left|\overrightarrow{BA}\right|\right\}=\max\left\{\left|z_1\right|,\left|z_1-z_2\right|\right\}=\max\left\{\alpha\left|z_1-z_2\right|,\left|z_1-z_2\right|\right\}$$

故$\lambda(\alpha)=\max\{\alpha,1\}$.



6．是否存在正整数 m， n 使得 $m^{20}+11^{n}$ 为完全平方数？请证明你的结论.

证明：假设存在正整数 m， n 使得 $m^{20}+11^{n}=k^{2}$，其中 $k\in\mathbb{Z}$． 则

$$11^{n}=k^{2}-m^{20}=(k-m^{10})(k+m^{10})\ .$$

故存在整数 $\alpha,\beta\geq 0$ 使得

$$\begin{cases} k-m^{10}=11^{\alpha}, & ① \\ k+m^{10}=11^{\beta}. & ② \end{cases}$$

比较①，②，得 $\alpha<\beta$． ②－①，得 $2m^{10}=11^{\alpha}(11^{\beta-\alpha}-1)$．

设 $m=11^{\gamma}m_{1}$， 其中 $\gamma,m_{1}\in\mathbb{Z}$， $11\nmid m_{1}$， 则 $11^{10\gamma}\cdot 2m_{1}^{10}=11^{\alpha}(11^{\beta-\alpha}-1)$．

因为 $11\nmid 2m_{1}^{10}$， $11\nmid 11^{\beta-\alpha}-1$， 故 $10\gamma=\alpha$， 从而 $2m_{1}^{10}=11^{\beta-\alpha}-1$．

由费马小定理， $m_{1}^{10}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 11)$， 故 $2m_{1}^{10}\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 11)$， 但 $11^{\beta-\alpha}-1\equiv 10\ (\mathrm{mod}\ 11)$，

矛盾.

故不存在正整数 m， n 使得 $m^{20}+11^{n}$ 为完全平方数.

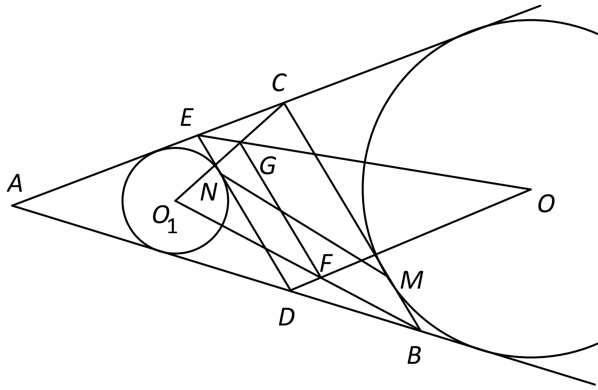
7．从左到右编号为 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 的 n 个盒子共装有 n 个小球，每次可以选择一个盒子 B_k，进行如下操作：(1) 若 $k=1$ 且 B_1 中至少有 1 个小球，则可从 B_1 中移 1 个小球至 B_2 中；(2) 若 $k=n$ 且 B_n 中至少有 1 个小球，则可从 B_n 中移 1 个小球至 B_{n-1} 中；(3) 若 $2\le k\le n-1$ 且 B_k 中至少有 2 个小球，则可从 B_k 中分别移 1 个小球至 B_{k+1} 和 B_{k-1} 中．求证：无论初始时这些小球如何放置，总能经过有限次操作使得每个盒子中恰有 1 个小球．

解：对于任意两个向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，若存在 $1\le k\le n$ 使得 $x_1=y_1,\cdots,x_{k-1}=y_{k-1},x_k>y_k$，则记 $\mathbf{x}\succ\mathbf{y}$．用一非负整数向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示各盒子中的小球数目．经过一次对 B_k 的操作后，各盒子中的小球数目从 $\mathbf{x}$ 变为 $\mathbf{x}+\alpha_k$，其中 $\alpha_1=(-1,1,0,\cdots,0)$，$\alpha_k=(\underbrace{0,\cdots,0}_{k-2个},1,-2,1,0,\cdots,0)$（$2\le k\le n-1$），$\alpha_n=(0,\cdots,0,1,-1)$．当 $k\ge 2$ 时，总有 $\mathbf{x}+\alpha_k\succ\mathbf{x}$．因此，对于任意初始状态，总可以通过一系列对 $B_2,\cdots,B_n$ 的操作（只要 $k\ge 2$ 且 B_k 中至少有两个小球，就对 B_k 施行操作），使得操作后的小球数目 $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 满足 $y_k\le 1$，$\forall k\ge 2$．若 $y_2=\cdots=y_n=1$，则已经满足题目要求；否则有 $y_1\ge 2$．设 i 是满足 $y_i=0$ 的最小整数，通过一系列对 $B_1,\cdots,B_{i-1}$ 的操作，可以使得小球数目变为 $(y_1-1,1,\cdots,1,y_{i+1},\cdots,y_n)$．具体操作如下：

$$(y_1,1,\cdots,1,0,y_{i+1},\cdots,y_n)\xrightarrow{B_1,B_2,\cdots,B_{i-1}}(y_1,1,\cdots,1,0,1,y_{i+1},\cdots,y_n)\xrightarrow{B_1,B_2,\cdots,B_{i-2}}$$
$$(y_1,1,\cdots,1,0,1,1,y_{i+1},\cdots,y_n)\to\cdots\to(y_1,0,1,\cdots,1,y_{i+1},\cdots,y_n)\xrightarrow{B_1}(y_1-1,1,\cdots,1,y_{i+1},\cdots,y_n).$$

重复以上操作，最终可使小球数目满足题目要求．

8．如图，$\odot O$ 为$\triangle ABC$ 中 BC 边上的旁切圆，点 D、E 分别在线段 AB、AC 上，使得 $DE /\!/ BC$．$\odot O_1$ 为$\triangle ADE$ 的内切圆，O_1B 交 DO 于点 F，O_1C 交 EO 于点 G．$\odot O$ 切 BC 于点 M，$\odot O_1$ 切 DE 于点 N．求证：MN 平分线段 FG．



证法一：若 $AB=AC$，则图形关于$\angle BAC$ 的平分线成轴对称，结论显然成立．下面不妨设 $AB>AC$，如图二．设线段 BC 的中点为 L，连接 O_1L 交线段 FG 于点 R．连接 O_1N 并延长交直线 BC 于点 K，作 $AT\perp BC$ 于 T，交直线 DE 于点 S．连接 AO．显然 O_1 在线段 AO 上．首先由梅涅劳斯定理，得

$$\frac{O_1F}{FB}\cdot\frac{BD}{DA}\cdot\frac{AO}{OO_1}=1,\quad \frac{O_1G}{GC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AO}{OO_1}=1. \qquad ①$$

由于 $DE//BC$，故 $\frac{BD}{DA}=\frac{CE}{EA}$，因此 $\frac{O_1F}{FB}=\frac{O_1G}{GC}$，即 $FG//BC$，故 $\frac{FR}{GR}=\frac{BL}{CL}=1$，因此 R 是 FG 的中点．下面只需证明 M,R,N 三点共线．

由梅涅劳斯定理的逆定理，我们只需证明

$$\frac{O_1R}{RL}\cdot\frac{LM}{MK}\cdot\frac{KN}{NO_1}=1. \qquad ②$$

由于 $FR//BL$，故 $\frac{O_1R}{RL}=\frac{O_1F}{FB}=\frac{OO_1}{AO}\cdot\frac{AD}{DB}$（第二个等号用到了①），故我们只需证明

$$\frac{OO_1}{AO}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{LM}{MK}\cdot\frac{KN}{NO_1}=1. \qquad ③$$

由于 $O_1K\perp DE, OM\perp BC, AT\perp BC, DE//BC$，故 O_1K, OM, AT 三条直线彼此平行，由平行线分线段成比例定理得 $\frac{OO_1}{AO}=\frac{MK}{MT}$，将此式代入③，我们只需证明

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{LM}{MT}\cdot\frac{KN}{NO_1}=1. \qquad ④$$

由于 $DE//BC, KN\perp DE, ST\perp BC$，故四边形 $KNST$ 为矩形，因此 $KN=ST$．再由 $DS//BT$ 得 $\frac{AD}{DB}=\frac{AS}{ST}$，代入④中，我们只需证明

$$\frac{LM}{MT}=\frac{NO_1}{AS}. \qquad ⑤$$

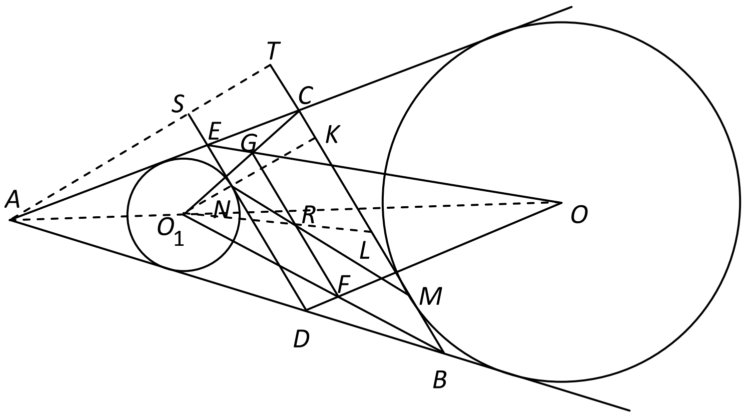
记 $BC=a, AC=b, AB=c$，则

$$BM=\frac{a+b-c}{2}\text{（旁切圆性质）},\quad BL=\frac{a}{2},$$

$$BT=c\cos\angle ABC=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a},$$

故
$$\frac{LM}{MT}=\frac{BL-BM}{BT-BM}=\frac{\frac{c-b}{2}}{\frac{c^2-b^2+a(c-b)}{2a}}=\frac{a}{a+b+c}.$$

另一方面，$\frac{NO_1}{AS}=\frac{\frac{2S_{\triangle ADE}}{AD+DE+AE}}{\frac{2S_{\triangle ADE}}{DE}}=\frac{DE}{AD+DE+AE}=\frac{a}{a+b+c}$，故⑤式成立，证毕.



图二

证法二：设⊙O、⊙O_1 半径分别为 r、r_1．显然 O_1, O, A 共线，

$$\left.\begin{array}{l} DE//BC \Rightarrow \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CE} \\ \dfrac{OF}{FD}=\dfrac{S_{\Delta BOO_1}}{S_{\Delta DBO_1}}=\dfrac{\frac{1}{2}(AB\sin\frac{A}{2})\cdot OO_1}{\frac{1}{2}r_1\cdot BD} \\ \dfrac{OG}{GE}=\dfrac{S_{\Delta OO_1C}}{S_{\Delta EOO_1}}=\dfrac{\frac{1}{2}(AC\sin\frac{A}{2})\cdot OO_1}{\frac{1}{2}r_1\cdot CE} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OF}{FD}=\frac{OG}{GE} \Rightarrow FG//DE//BC.$$

连接 ON 并延长交 BC 于 K．当 $\angle ABC=\angle ACB$ 时，由对称性，命题成立．下面不妨设 $\angle ABC<\angle ACB$．

如图三，连接 OM, O_1M, OB, MD, DO_1．由 $O_1N//OM$ 知

$$S_{\Delta ONM}=S_{\Delta MOO_1}=\frac{1}{2}r\cdot OO_1\cdot\sin\frac{C-B}{2} \quad ①$$

$$\frac{OG}{GE}=\frac{OF}{DF}=\frac{S_{\Delta BOO_1}}{S_{\Delta BDO_1}}=\frac{\frac{1}{2}BO\cdot OO_1\cdot\sin\frac{C}{2}}{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot DO_1\cdot\sin\frac{B}{2}}=\frac{r\cdot OO_1\cdot\sin\frac{C}{2}}{r_1\cdot BD\cdot\cos\frac{B}{2}} \quad ②$$

（$r=BO\cdot\cos\frac{B}{2}, r_1=DO_1\cdot\sin\frac{B}{2}$）

$$S_{\Delta DMN}-S_{\Delta MEN}=\frac{1}{2}NK\cdot(DN-NE)=\frac{1}{2}BD\cdot\sin B\cdot\left(r_1\cot\frac{B}{2}-r_1\cot\frac{C}{2}\right) \quad ③$$

由②、③知

$$\frac{OG}{GE}(S_{\Delta DMN}-S_{\Delta MEN})=\frac{1}{2}r_1\cdot BD\cdot\sin B\cdot\left(\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}\right)\cdot\frac{r\cdot OO_1\cdot\sin\frac{C}{2}}{r_1\cdot BD\cdot\cos\frac{B}{2}}$$
$$=r\cdot OO_1\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\left(\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}\right)$$
$$=r\cdot OO_1\cdot\sin\frac{C-B}{2}.$$

结合①知 $\dfrac{OG}{GE}(S_{\Delta DMN}-S_{\Delta MEN})=2S_{\Delta MON}$．

因为 $\dfrac{OG}{GE}:2=\dfrac{OG}{OE}:\left(\dfrac{DF}{OD}+\dfrac{EG}{OE}\right)$

所以 $\dfrac{OF}{OD}\cdot S_{\Delta MND}-\dfrac{OG}{OE}\cdot S_{\Delta MEN}=\left(\dfrac{DF}{OD}+\dfrac{EG}{OE}\right)\cdot S_{\Delta MON}$

$$\frac{OF\cdot S_{\Delta MND}-DF\cdot S_{\Delta MON}}{OD}=\frac{OG\cdot S_{\Delta MEN}+EG\cdot S_{\Delta MON}}{OE}$$

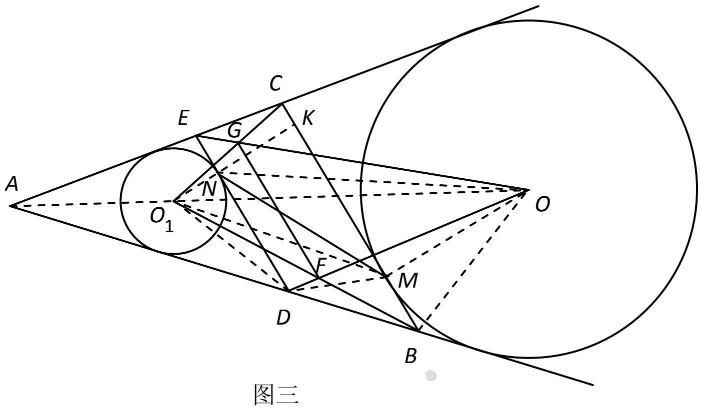
④

而 $S_{\Delta NMG}=\dfrac{S_{\Delta MEN}\cdot OG+EG\cdot S_{\Delta MON}}{OE}$，

所以 $S_{\Delta NMG}=\dfrac{OF\cdot S_{\Delta MND}-DF\cdot S_{\Delta MON}}{OD}$.

同理 $S_{\Delta NMF}=\dfrac{OF\cdot S_{\Delta MND}-DF\cdot S_{\Delta MON}}{OD}$.

由④知 $S_{\Delta NMG}=S_{\Delta NMF}$，所以 MN 平分线段 FG.



图三