2021～2022学年高三9月质量检测巩固卷

理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合，常用逻辑用语，函数，导数及其应用。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x|\lg x<1\}$，$N=\{x|-3x^2+5x+12<0\}$，则 $M\cap N=$

A. $(0,3)$　　B. $(0,10)$　　C. $(0,3]$　　D. $(3,10)$

2. “$\forall x\in\mathbf{R}, x+1\leqslant 3^x$”的否定是

A. $\forall x\in\mathbf{R}, x+1\geqslant 3^x$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}, x+1>3^x$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0+1>3^{x_0}$　　D. $\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0+1\geqslant 3^{x_0}$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{x}+\lg(2-x)$ 的定义域是

A. $(-\infty,2)$　　B. $[0,2)$　　C. $[0,2]$　　D. $[0,+\infty)$

4. 已知 $a=4^{0.3}$，$b=8^{\frac{1}{3}}$，$c=\lg 0.3$，这三个数的大小关系为

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

5. 在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$，其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k(k=1,2)$. 已知太阳的星等是-26.7，天狼星的星等是-1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为

A. $10^{10.1}$　　B. 10.1　　C. $\lg 10.1$　　D. $10^{-10.1}$

6. 已知函数 $f(x)=e^x-\log_{\frac{1}{3}}x$，给出下列两个命题：

命题 p：若 $x_0\geqslant 1$，则 $f(x_0)\geqslant 3$；

命题 q：$\exists x_0\in[1,+\infty)$，$f(x_0)=3$.

则下列叙述错误的是

A. p 是假命题　　B. p 的否命题是：若 $x_0<1$，则 $f(x_0)<3$

C. $\neg q$：$\forall x\in[1,+\infty)$，$f(x)\neq 3$　　D. $\neg q$ 是真命题

7. 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且其在区间$[0,+\infty)$上单调递增,若 $f(x-a)<f(x-1)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立,则实数 a 的取值范围是

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-3,3)$

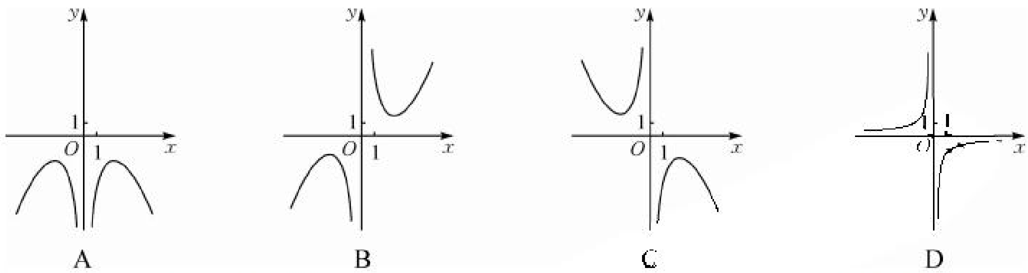
C. $(0,3)$　　D. $(-\infty,1]$

8. 在新冠肺炎疫情期间某小区对在外务工,春节返乡人员进行排查,现有甲、乙、丙、丁四名返乡人员,其中只有一个人去过高风险地区. 甲说:“乙或丙去过高风险地区.”乙说:“甲和丙都没去过高风险地区.”丙说:“我去过高风险地区.”丁说:“乙去过高风险地区.”这四个人的话只有两句是对的,则去过高风险地区的是

A. 甲　　B. 乙

C. 丙　　D. 丁

9. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{x^{2}}$的图象大致为



10. 函数 $f(x)=\log_a(|x-1|-a)(a>0$ 且 $a\neq1)$,则“$f(x)$在$[3,+\infty)$上是单调函数”是“$1<a<2$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, x>0,\\ e^{x}, x\leqslant 0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $m-f(x)=0$ 有两个不同的实数根,则实数m 的取值范围为

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,0]$　　D. $(0,1]$

12. 设函数 $f(x)=-x^2-6x+m$, $g(x)=2x^3+3x^2-12x-m$, $P(x_1,f(x_1))$, $Q(x_2,g(x_2))$,若 $\forall x_1\in[-5,-2]$, $\exists x_2\in[-1,2]$,使得直线 PQ 的斜率为 0,则 m 的最小值为

A. -8　　B. $-\dfrac{5}{2}$

C. -6　　D. 2

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=(x+1)(x+a)x^4$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,则 $a=$________.

14. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的周期为 6,当 $x\in[-3,3)$时,$f(x)=(\dfrac{1}{2})^x-x+1$,则$f(-\log_2 3)+f(\log_2 12)=$________

15. 若直线 $y=9x+a$ 是函数 $y=x^3-3x$ 的图象在某点处的切线,则实数 $a=$________.

16. 已知函数 $f(x)=e^{|x-t|}+|x-t|$在区间$(3,+\infty)$上单调递增,则实数 t 的取值范围是

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{\log_{0.3}(\frac{9}{2}x-\frac{1}{2})}$ 的定义域为 A，$m>0$，函数 $g(x)=3^{x-2}(0<x\leqslant m)$ 的值域为 B.

(1) 当 $m=2$ 时，求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$；

(2) 是否存在实数 m，使得 $A=B$？若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由.

18.（本小题满分 12 分）

已知 $m>0$，函数 $f(x)=|x|-1$，$g(x)=\frac{x-m+1}{e^x}$，设 p：若函数 $f(x)$ 在 $[m,m+1]$ 上的值域为 A，则 $A\subseteq[-\frac{1}{3},2]$，$q$：函数 $g(x)$ 的图象不经过第四象限.

(1) 若 $m=1$，判断 p，q 的真假；

(2) 若 $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，求实数 m 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2e^x-2e^{-x}+ax+b\sin x(a,b\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $b=0$ 时，$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，求 a 的最小值；

(2) 若 $a>-1$，$2<b<3$，$f(ax-1)+f(x-a)<0$，求 x 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

节约资源和保护环境是中国的基本国策. 某化工企业，积极响应国家要求，探索改良工艺，使排放的废气中含有的污染物数量逐渐减少. 已知改良工艺前所排放的废气中含有的污染物数量为 2 mg/m³，首次改良后所排放的废气中含有的污染物数量为 1.94 mg/m³. 设改良工艺前所排放的废气中含有的污染物数量为 r_0，首次改良工艺后所排放的废气中含有的污染物数量为 r_1，则第 n 次改良后所排放的废气中的污染物数量 r_n，可由函数模型 $r_n=r_0-(r_0-r_1)\cdot 5^{0.5n+p}$ ($p\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}^*$) 给出，其中 n 是指改良工艺的次数.

(1)试求改良后所排放的废气中含有的污染物数量的函数模型；

(2)依据国家环保要求，企业所排放的废气中含有的污染物数量不能超过 0.08 mg/m³，试问至少进行多少次改良工艺后才能使得该企业所排放的废气中含有的污染物数量达标.(参考数据：取 lg2=0.3)

21.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(ax^2+2x-1)$，$g(x)=2-|x|$.

(1)当 $a=0$ 时，求函数 $F(x)=f(x)-4^x$ 在 $\left[1,\frac{5}{2}\right]$ 上的值域；

(2)若不论 x_2 取何值，$f(x_1)>g(x_2)$ 对任意 $x_1\in\left[\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right]$ 恒成立，求 a 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-1$，$g(x)=ax^2-(a-2)x$ ($a\in\mathbf{R}$).

(1)若 $a>0$，$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，求函数 $H(x)=f'(x)-g(x)$ 的极值；

(2)假设函数 $G(x)=g(x)+(a-2)x$，$f(x)$ 的图象与 $G(x)$ 的图象有 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两个不同的交点，证明：$\ln(x_1x_2)>2+\ln 2$.

2021～2022 学年高三 9 月质量检测巩固卷·理科数学

参考答案、提示及评分细则

1. D　因为 $M=(0,10)$，$N=(-\infty,-\frac{4}{3})\cup(3,+\infty)$，所以 $M\cap N=(3,10)$.

2. C　"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x+1\leqslant 3^x$"的否定为"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0+1>3^{x_0}$". 故选 C.

3. B　据题意，得 $\begin{cases}2-x>0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 所以 $0\leqslant x<2$. 故选 B.

4. C　$\because b=2=4^{0.5}>4^{0.3}=a>0$，$c=\lg 0.3<\lg 1=0$，$\therefore c<a<b$.

5. A　两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$，令 $m_2=-1.45$，$m_1=-26.7$，$\lg\frac{E_1}{E_2}=\frac{2}{5}\cdot(m_2-m_1)=\frac{2}{5}(-1.45+26.7)=10.1$，$\frac{E_1}{E_2}=10^{10.1}$. 故选 A.

6. D　$\because f(x)=e^x+\log_3 x$ 为定义域内的增函数，$\therefore$ 当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant f(1)=e$，故 p 假 q 真，则 $\neg q$ 是假命题.

7. A　据题设分析知，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. 又 $f(x-a)<f(x-1)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，所以 $x-a<x-1$，所以 $a>1$. 故选 A.

8. C　假设甲去过高风险地区，则四人说的都是假话，与题意不符；假设乙去过高风险地区，则甲、乙、丁说的都是真话，与题意不符；假设丙去过高风险地区，则甲、丙说的是真话，乙、丁说的是假话，符合题意；假设丁去过高风险地区，则甲、丙、丁说的都是假话，与题意不符. 故选 C.

9. C　因为 $f(x)=\frac{e^{-x}-e^x}{x^2}$，所以 $f(-x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}$，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于坐标原点对称；$f(1)=e^{-1}-e$；因为 $f'(x)=\frac{(2-x)e^x-(x+2)e^{-x}}{x^3}$，所以当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减. 故选 C.

10. B　当 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增时，由 $\begin{cases}a>1,\\ |3-1|-a>0\end{cases}$ 得 $1<a<2$；

当 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递减时，由 $\begin{cases}0<a<1,\\ |3-1|-a>0\end{cases}$ 得 $0<a<1$.

11. D　$f(x)=e^x$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，且 $f(0)=1$. $f(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 令 $\ln x=1$，则 $x=e$. 据题设分析知，若关于 x 的方程 $m-f(x)=0$ 有两个不同实数根，则 $0<m\leqslant 1$. 故选 D.

12. C　$f(x)=-x^2-6x+m=-(x+3)^2+m+9$，$x\in[-5,-2]$ 时，

$f(x)_{\max}=f(-3)=m+9$，$f(x)_{\min}=f(-5)=m+5$.

$g'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$，所以 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，在区间 $(1,2]$ 上单调递增，$g(x)_{\min}=g(1)=-7-m$，$g(-1)=13-m$，$g(2)=4-m$. 所以 $g(x)_{\max}=13-m$. $\forall x_1\in[-5,-2]$，$\exists x_2\in[-1,2]$，使得直线 PQ 斜率为 0，等价于 $\begin{cases}f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max},\\ f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m+9\leqslant 13-m,\\ m+5\geqslant -7-m,\end{cases}$ 解得 $-6\leqslant m\leqslant 2$.

13. -1　$\because y=x^4$ 为偶函数，$\therefore y=(x+1)(x+a)=x^2+(a+1)x+a$ 为偶函数，则 $-\frac{a+1}{2}=0$，$\therefore a=-1$.

14. $\frac{43}{3}$　$f(-\log_2 3)+f(\log_2 12)=f(-\log_2 3)+f(-6+\log_2 12)=f(-\log_2 3)+f(\log_2\frac{3}{16})$

$=(\frac{1}{2})^{-\log_2 3}+\log_2 3+1+(\frac{1}{2})^{\log_2\frac{3}{16}}-\log_2\frac{3}{16}+1=3+\log_2 16+2+\frac{16}{3}=\frac{43}{3}$.

15. -16 或 16　设切点坐标为 (x_0,y_0)，则 $\begin{cases} y_0=9x_0+a, \\ y_0=x_0^3-3x_0, \\ 3x_0^2-3=9, \end{cases}$ 所以 $a=-16$ 或 $a=16$.

16. $(-\infty,3]$　$f(x)=e^{|x-t|}+|x-t|$. 讨论：当 $x\geqslant t$ 时，$f(x)=e^{x-t}+x-t$；当 $x\leqslant t$ 时，$f(x)=e^{-(x-t)}+[-(x-t)]=\left(\frac{1}{e}\right)^{x-t}-x+t$. 分析知，函数 $f(x)$ 在区间 $[t,+\infty)$ 上单调递增，在区间 $(-\infty,t]$ 上单调递减. 又 $f(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上单调递增，所以 $3\geqslant t$.

17. 解：(1)由 $\begin{cases} \frac{9}{2}x-\frac{1}{2}>0, \\ \log_{0.3}(\frac{9}{2}x-\frac{1}{2})\geqslant 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{9}<x\leqslant\frac{1}{3}$，即 $A=(\frac{1}{9},\frac{1}{3}]$. …………………………………… 2分

当 $m=2$ 时，因为 $0<x\leqslant 2$，所以 $\frac{1}{9}<3^{x-2}\leqslant 1$，即 $B=(\frac{1}{9},1]$，…………………………………… 3分

所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=(\frac{1}{3},1]$. …………………………………… 5分

(2)因为 $B=(\frac{1}{9},3^{m-2}]$，若存在实数 m，使 $A=B$，则必有 $3^{m-2}=\frac{1}{3}$，解得 $m=1$，

故存在实数 $m=1$，使得 $A=B$. …………………………………… 10分

18. 解：(1)若 $m=1$，$f(x)=|x|-1$，对应的值域为 $A=[0,1]$，$\therefore p$ 为真. …………………………………… 2分

若 $m=1$，$g(x)=\frac{x}{e^x}$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，$\therefore q$ 为真. …………………………………… 4分

(2)$\because A=[m-1,m]$，$\therefore$ 若 p 为真，则 $\begin{cases} m-1\geqslant-\frac{1}{3}, \\ m\leqslant 2 \end{cases}$ 即 $\frac{2}{3}\leqslant m\leqslant 2$. …………………………………… 7分

若 q 为真，则当 $x>0$ 时，$g(x)\geqslant 0$，即 $m\leqslant x+1$，$\therefore m\leqslant 1$，又 $m>0$，$\therefore 0<m\leqslant 1$. …………………… 9分

因为 $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，所以 p，q 一真一假.

若 p 真 q 假，则有 $1<m\leqslant 2$；若 p 假 q 真，则有 $0<m<\frac{2}{3}$. …………………………………… 11分

综上所述，实数 m 的取值范围是 $(0,\frac{2}{3})\cup(1,2]$. …………………………………… 12分

19. 解：(1)当 $b=0$ 时，$f(x)=2e^x-2e^{-x}+ax$，

由 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数可得 $f'(x)=2e^x+2e^{-x}+a\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，…………………………………… 2分

则 $(2e^x+2e^{-x}+a)_{\min}\geqslant 0$，$\because 2e^x+2e^{-x}+a\geqslant 2\sqrt{2e^x\times 2e^{-x}}+a=4+a$，$\therefore 4+a\geqslant 0$，$\therefore a\geqslant -4$，则 a 的最小值为 -4.

…………………………………………………………………………………… 5分

(2)$f'(x)=2e^x+2e^{-x}+a+b\cos x$，

$\because a>-1$，$\therefore 2e^x+2e^{-x}+a\geqslant 4+a>3$，…………………………………… 6分

$\because 2<b<3$，$b\cos x\in[-b,b]$，$\therefore -3<b\cos x<3$，$\therefore f'(x)=2e^x+2e^{-x}+a+b\cos x>0$，

$\therefore f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数. …………………………………… 8分

又 $f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 为奇函数，…………………………………… 9分

由 $f(ax-1)+f(x-a)<0$ 得 $f(ax-1)<-f(x-a)=f(a-x)$，…………………………………… 10分

$\because f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，

$\therefore ax-1<a-x$，$\therefore (a+1)x<a+1$，$\because a>-1$，$\therefore a+1>0$，$\therefore x<1$，

故 x 的取值范围为 $(-\infty,1)$. …………………………………… 12分

20. 解:(1)由题意得 $r_0=2, r_1=1.94$, ………………………………………… 1分

所以当 $n=1$ 时,$r_1=r_0-(r_0-r_1)\cdot 5^{0.5+p}$, ………………………………………… 2分

即 $1.94=2-(2-1.94)\cdot 5^{0.5+p}$,解得 $p=-0.5$,

所以 $r_n=2-0.06\times 5^{0.5n-0.5}(n\in\mathbf{N}^*)$, ………………………………………… 4分

故改良后所排放的废气中含有的污染物数量的函数模型为 $r_n=2-0.06\times 5^{0.5n-0.5}(n\in\mathbf{N}^*)$; ………………… 5分

(2)由题意可得,$r_n=2-0.06\times 5^{0.5n-0.5}\leqslant 0.08$, ………………………………………… 6分

整理得,$5^{0.5n-0.5}\geqslant\frac{1.92}{0.06}$,即 $5^{0.5n-0.5}\geqslant 32$,

两边同时取常用对数,得 $0.5n-0.5\geqslant\frac{\lg 32}{\lg 5}$. ………………………………………… 8分

整理得 $n\geqslant 2\times\frac{5\lg 2}{1-\lg 2}+1$. ………………………………………… 9分

将 $\lg 2=0.3$ 代入,得 $2\times\frac{5\lg 2}{1-\lg 2}+1=\frac{30}{7}+1\approx 5.3$, ………………………………………… 10分

又因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 $n\geqslant 6$,

综上,至少进行6次改良工艺后才能使得该企业所排放的废气中含有的污染物数量达标. ………………… 12分

21. 解:(1)∵$y=\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ 与 $y=-4^x$ 在 $\left[1,\frac{5}{2}\right]$ 上均为减函数, ………………………………… 2分

∴$F(x)$在$\left[1,\frac{5}{2}\right]$上为减函数, ………………………………………… 3分

∴$F\left(\frac{5}{2}\right)\leqslant F(x)\leqslant F(1)$.

∵$F(1)=-4, F\left(\frac{5}{2}\right)=-2-2^5=-34$,

∴$F(x)$的值域为$[-34,-4]$. ………………………………………… 6分

(2)易知 $g(x)$的最大值为2. ………………………………………… 7分

由题意可知,$f(x)>2$ 即 $0<ax^2+2x-1<\frac{1}{4}$对任意 $x\in\left[\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right]$恒成立.

即$\frac{1-2x}{x^2}<a<\frac{\frac{5}{4}-2x}{x^2}$对任意 $x\in\left[\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right]$恒成立.

设 $p(x)=\frac{1-2x}{x^2}=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2-1, q(x)=\frac{\frac{5}{4}-2x}{x^2}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{4}{5}$,

∵$x\in\left[\frac{7}{10},\frac{3}{2}\right]$,∴$\frac{1}{x}\in\left[\frac{2}{3},\frac{10}{7}\right]$,∴$p(x)_{\max}=\left(\frac{10}{7}-1\right)^2-1=-\frac{40}{49}, q(x)_{\min}=-\frac{4}{5}$,∴$a\in\left(-\frac{40}{49},-\frac{4}{5}\right)$. … 12分

22. 解:(1)据题设知,$H(x)=f'(x)-g(x)=\ln x-ax^2+(a-2)x+1$, ………………………………… 1分

所以 $H'(x)=\frac{1}{x}-2ax+(a-2)=\frac{-2ax^2+(a-2)x+1}{x}=\frac{(-2x+1)(ax+1)}{x}$. ………………………… 2分

令 $H'(x)=0$,则$\frac{(-2x+1)(ax+1)}{x}=0$,所以 $x=\frac{1}{2}$或 $x=-\frac{1}{a}$(舍). ………………………………… 3分

分析知,当 $a>0$ 时,$H(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减, ………………………… 4分

所以 $H(x)$的极大值 $H\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2+\frac{1}{4}a$,不存在极小值. ………………………………… 5分

证明:(2)因为 $G(x)=g(x)+(a-2)x=ax^2$,

函数 $f(x)=x\ln x-1$ 的图象与 $G(x)$的图象有 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$两个不同的交点,

所以关于 x 的方程 $ax^2=x\ln x-1$，即 $ax=\ln x-\frac{1}{x}$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2，

所以 $\ln x_1-\frac{1}{x_1}=ax_1$ ①，$\ln x_2-\frac{1}{x_2}=ax_2$ ②，…………………… 6 分

①+②，得 $\ln(x_1x_2)-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=a(x_1+x_2)$ ③，

②−①，得 $\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=a(x_2-x_1)$ ④.

由③④，得 $\ln(x_1x_2)-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}$. …………………… 7 分

不妨设 $0<x_1<x_2$，记 $t=\frac{x_2}{x_1}$.

令 $F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，则 $F'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$

>0，

所以 $F(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又当 $t=1$ 时，$\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}=0$，

所以 $F(t)>0$，…………………… 8 分

则 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，即 $\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$，

所以 $\ln(x_1x_2)-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}$

>2.

因为 $\ln(x_1x_2)-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}<\ln(x_1x_2)-\frac{4\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2}$

$=\ln(x_1x_2)-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}$

$=2\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}$，

所以 $2\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}>2$，即 $\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}>1$. …………………… 10 分

令 $\varphi(x)=\ln x-\frac{2}{x}$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\ln(\sqrt{2}\mathrm{e})-\frac{2}{\sqrt{2}\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\ln 2+1-\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}$

<1，

所以 $\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}>1>\ln(\sqrt{2}\mathrm{e})-\frac{2}{\sqrt{2}\mathrm{e}}$，

即 $\varphi(\sqrt{x_1x_2})>\varphi(\sqrt{2}\mathrm{e})$，

所以 $x_1x_2>2\mathrm{e}^2$，

所以 $\ln(x_1x_2)>2+\ln 2$. …………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。