

郑州市 2022—2023 学年下期期末考试

高一数学试题卷

注意事项:

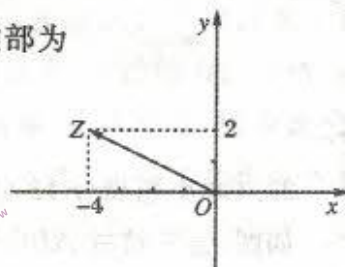
本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 考试时间 120 分钟, 满分 150 分. 考生应首先阅读答题卡上的文字信息, 然后在答题卡上作答, 在试题卷上作答无效. 交卷时只交答题卡.

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 如图, 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应的复数是 z , 则复数 $\frac{z}{1+i}$ 的虚部为

- A. $-3i$
B. -3
C. $3i$
D. 3



2. 抛掷两枚质地均匀的硬币, 记事件 A = “第一枚正面向上”, 事件 B = “第二枚反面向上”, 则事件 A 与 B 的关系为

- A. 互斥 B. 互为对立 C. 相互独立 D. 相等

3. 已知向量 $a = (x, 2)$, $b = (-1, 3)$, 若 $(a+b) \perp b$, 则 x 的值为

- A. 6 B. -6 C. 16 D. -16

4. 若数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的平均数为 3, 方差为 4, 则下列说法错误的是

- A. 数据 $4x_1+1, 4x_2+1, \dots, 4x_{10}+1$ 的平均数为 13
B. 数据 $3x_1, 3x_2, \dots, 3x_{10}$ 的方差为 12

C. $\sum_{i=1}^{10} x_i = 30$

D. $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 130$

5. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 设 $a = (2\sin A, -1)$,

$b = (\cos 2A, \sqrt{3} \cos A)$, 且 $a \parallel b$, 则角 A 可以为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{12}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

6. 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 O , 且 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}|$, 则向量 $\overrightarrow{CA}$ 在向量 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影向量为

- A. $-\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ B. $\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ C. $\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ D. $\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

7. 2023 年郑州市科技活动周暨郑州科技馆“青春逐梦科技”主题活动于 5 月 31 日落下帷幕. 科技活动周期间, 郑州市科技馆为青少年准备了一场场科技盛宴, 通过魅力科学课、深度看展品、科普表演秀、科普大篷车等活动, 引导青少年用科学的眼光看待世界, 点燃青少年对科学的好奇心. 5 月 27 日科技馆安排了《失重通道》、《永不消逝的密码》、《海底小火山》、《回旋纸飞机》四个体验课程. 每个人选择每门课程是相互独立的. 已知小明选择四门课程的概率分别为 $\frac{2}{3}, p, p, \frac{1}{2}(p \geq \frac{1}{3})$, 若他恰好选择两门课程的概率为 $\frac{3}{8}$, 则他四门课程都选择的概率为

- A. $\frac{4}{27}$ B. $\frac{1}{27}$ C. $\frac{1}{108}$ D. $\frac{1}{12}$

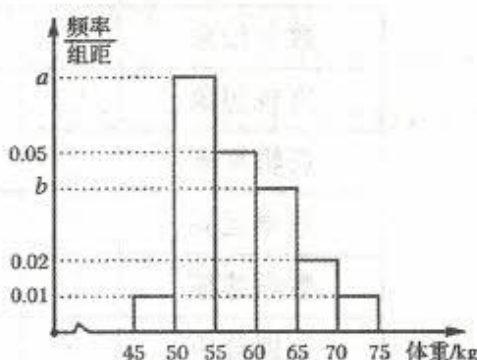
8. 三棱锥 $A-BCD$ 的所有顶点都在球 O 的表面上, 且 $AB=CD=2$, $AC=AD=4$, $BC=BD=2\sqrt{3}$, 则球 O 的表面积为

- A. 16π B. 32π C. $\frac{188\pi}{11}$ D. $\frac{144\pi}{25}$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某校随机抽取了 100 名学生测量体重, 经统计, 这些学生的体重数据(单位: kg)全部介于 45 至 75 之间, 且体重不低于 60 kg 的人数为 35 人, 将数据整理得到如图所示的频率分布直方图, 则

- A. 频率分布直方图中 b 的值为 0.04



- B. 这 100 名学生中体重低于 55 kg 的人数为 35
- C. 用样本估计总体, 估计该校学生体重的第 80 百分位数约为 63.75
- D. 用样本估计总体, 估计该校学生体重的平均数小于中位数
10. 已知复数 $z_1 = -2 + ai, z_2 = a - 4i (a \in \mathbf{R})$, 则下列说法正确的是
- A. 若 $z_1 + z_2$ 为纯虚数, 则 $a = 2$
- B. 若 $z_1 z_2$ 为实数, 则 $a = 0$
- C. 设 $a = 2$, 复数 z 满足 $|z - z_1| = 4$, 则 $|z|$ 的最大值为 $4 + 2\sqrt{2}$
- D. 复数 $z_1 - z_2$ 对应的点不可能在第一、三象限的角平分线上
11. 已知四面体 $A-BCD$ 的各棱长均为 2, 且 E 为 CD 的中点, 则
- A. $BC \perp AD$
- B. 四面体 $A-BCD$ 的表面积为 $4\sqrt{3}$
- C. 直线 AC 与 BE 所成的角为 60°
- D. 四面体 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $2a^2 = 2b^2 + c^2$, 则
- A. $c = 2(b \cos A - a \cos B)$
- B. 若 D 为 AB 边的中点, 且 $CD = 2, c = 4$, 则 $b = 2$
- C. 若 $\tan B = \frac{1}{3}$, 则 $A = \frac{\pi}{4}$
- D. 当 $A - B$ 取得最大值时, $\triangle ABC$ 为直角三角形

第 II 卷(非选择题, 共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 某学校组织“红色故事”知识竞赛, 某班的 8 名参赛学生的成绩(单位: 分)分别是: 98、93、84、92、82、87、86、94, 则这 8 名学生成绩的 75% 分位数是 _____.

14. 已知某圆台的上底面和下底面的面积之比为 $4:9$, 轴截面面积为 15, 母线长为上底面半径的 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 倍, 则该圆台的体积为 _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BCA=90^\circ$, $BA=2BC=2$. 设 $\overrightarrow{AD}=\lambda \overrightarrow{AB}(\lambda \in [0,1])$, 则 $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\sin A=2\sin B\sin C$, 则 $\frac{b}{c}$ 的最大值是_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知 $a=2e_1+e_2$, $b=2e_2-3e_1$, 其中 e_1, e_2 是单位向量且夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

(I) 求 a, b 的夹角 θ ;

(II) 设 $c=4e_1-\frac{3}{2}e_2$, 若 $c=ma+nb$, 求 m 和 n 的值.

18. (本小题满分 12 分)

在一次校园诗朗诵比赛中, 由 10 名专业评委和 10 名观众代表各组成一个评委小组为选手打分.

已知某参赛选手的得分如下:

评委小组	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 组	7.3	7.5	7.8	7.8	8.0	8.0	8.2	8.3	8.5	8.6
B 组	6.8	7.5	7.6	7.8	7.8	8.0	8.0	8.5	9.0	9.0

(I) 分别计算该选手在 A 组和 B 组得分的平均数;

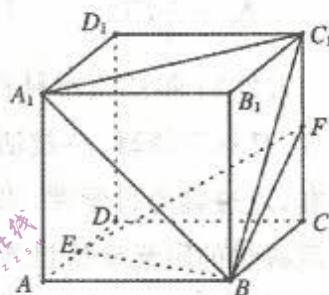
(II) 选择一个可以度量打分一致性的量, 并对每组评委的打分计算该度量值, 根据这个值判断 A 组与 B 组哪个是专业评委组, 哪个是观众代表组?

19. (本小题满分 12 分)

如图,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4.

(I) 求二面角 $B-A_1C_1-B_1$ 的正切值;

(II) 若 E, F 分别是棱 AD, CC_1 的中点,请画出过 B, E, F 三点的平面与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面的交线(保留作图痕迹,画出交线,无需说明理由),并求出交线围成的多边形的周长.



20. (本小题满分 12 分)

数学核心素养是指在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的关于数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现.数学核心素养包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析六个方面.某学校高一、高二、高三学生分别有 720, 1080, 1200 人,现采用分层抽样的方法,从该学校上述学生中抽取 250 人调查学生数学核心素养的发展情况.

(I) 应从高一、高二、高三学生中分别抽取多少人?

(II) 抽取的 250 人中,核心素养六个方面中至少两项不达标学生有 6 人,分别记为 A, B, C, D, E, F .具体情况如下表,其中“○”表示达标,“×”表示不达标.现从这 6 人中随机抽取 2 人接受采访.

数学核心素养	A	B	C	D	E	F
数学抽象	×	×	○	×	○	×
直观想象	○	○	×	○	×	×
逻辑推理	○	○	○	×	○	○
数学运算	×	×	○	○	×	×
数学建模	○	○	×	○	○	○
数据分析	×	×	○	○	○	×

(I) 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果;

(II) 设 M 为事件“抽取的 2 人不达标的项目中至少有一项相同”, 求事件 M 发生的概率.

21. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\sin(B-A) = \sin C + \sin A$.

(I) 求 B 的值;

(II) 给出以下三个条件: ① $a^2 - b^2 + c^2 + 5c = 0$; ② $a = \sqrt{7}, b = 1$; ③ $S_{\triangle ABC} = 5\sqrt{3}$, 若这三个条件中仅有两个正确, 请选出正确的条件, 并回答下列问题: $\angle ABC$ 的角平分线与直线 AC 交于点 D , 求 BD 的长.

22. (本小题满分 12 分)

如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $AC=4$, $AA_1=AB=2$, 且平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1BC .

(I) 求 BC 的长;

(II) 求直线 AC 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.

