考号________ 姓名________ 班级________ 学校________

密 封 线 内 不 要 答 题

2022学年第二学期浙江强基联盟高二5月统测

数学试题

命题人:绍兴鲁迅中学　潘建伟

审题人:常山县第一中学　占忠祥

一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x|y=\sqrt{1-x}\}$,集合 $N=\{y|y=e^x\}$,则 $M\cap N=$

A. $(0,1]$　　B. $[0,1]$　　C. $[0,+\infty)$　　D. $\varnothing$

2. 已知 $(x+yi)(2+i)=2-4i$(x,y 为实数),则 $\sqrt{x^2+y^2}=$

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 5　　D. $\sqrt{5}$

3. 已知直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(-2,3)$,若 l 过点 $A(4,3)$,则直线 l 的方程为

A. $3x-2y-6=0$　　B. $3x-2y+18=0$

C. $3x+2y+6=0$　　D. $3x+2y-18=0$

4. 已知实数 a,b,"$a>b$"的充分不必要条件是

A. $a^3>b^3$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $e^a>e^b$　　D. $\ln a>\ln b$

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$,$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|=2$,则下列向量中与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 所成夹角为钝角的是

A. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　　C. $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$　　D. $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

6. 从1到10这10个自然数中随机抽取3个不同的数字,和是3的倍数的概率为

A. $\frac{7}{12}$　　B. $\frac{3}{10}$　　C. $\frac{7}{20}$　　D. $\frac{13}{40}$

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})+\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$,将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)得到函数 $g(x)$ 的图象,若 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恰有2个极值点和2个零点,则 ω 的取值可以是

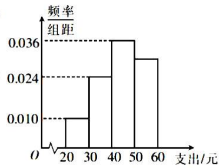
A. 1　　B. $\frac{5}{3}$　　C. 2　　D. $\frac{5}{2}$

8. 设 $a=e^{\frac{1}{e}}$,$b=\ln(e+1)$,$c=\cos\frac{1}{e}+\sin\frac{1}{e}$,则

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

二、多项选择题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得5分,选对但不全的得2分,有选错的得0分.

9. 已知某校有2100名学生,高一、高二、高三分别有800,700,600名学生,该校为了调查学生一周的生活费支出情况,现从高一抽出了一个容量为 n 的样本,其频率分布直方图如图所示,其中支出在 $[50,60]$ 内的学生有60人,则下列说法正确的是



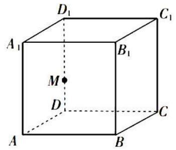
A. 样本中支出在 $[50,60]$ 内的频率为0.03

B. n 的值为200

C. 样本中位数的估计值是$\frac{400}{9}$

D. 按比例分配分层抽样，高二应抽取150名学生

10. 如图，在棱长为3的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M是棱DD_1上的点，$MD=1$，则



A. 直线BM与直线AD所成角的正切值是$\frac{\sqrt{10}}{3}$

B. 直线BM与平面BCC_1B_1所成角的正切值是$\frac{\sqrt{10}}{3}$

C. 点M到直线BC_1的距离为$\sqrt{11}$

D. 三棱锥$M-ABD$外接球的表面积为19π

11. 甲袋有2个白球和4个黑球，乙袋中有3个白球和3个黑球，先从甲袋中随机取出1个球放入乙袋中，分别以事件A_1，A_2表示从甲袋中取出的球是白球和黑球；再从乙袋中随机取出1个球，以事件B表示从乙袋中取出的球是黑球，下列结论正确的是

A. A_1，A_2是互斥事件　　　　B. $P(B)=\frac{11}{21}$

C. $P(B|A_1)=P(B)$　　　　D. $P(A_1|B)=\frac{3}{11}$

12. 已知斜率为k的直线l与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$交于$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$两点，M关于原点O的对称点为M'，则下列结论正确的是

A. 若$k=1$，则$|MN|_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

B. 若NM，NM'的斜率都存在，则$k_{NM}\cdot k_{NM'}=-2$

C. 当$OM\perp ON$时，直线l与一个定圆相切

D. 当$\triangle MON$的面积最大时，$y_1^2+y_2^2=2$

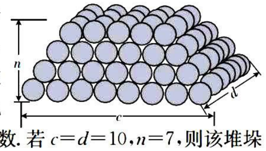
三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $(\frac{2}{x}-1)(x-2)^6$的展开式中x^3项的系数为__▲__.

14. 已知直线$l:x-y-2=0$和圆$C:(x-2)^2+(y-3)^2=2$，写出一条与直线l垂直且与圆C相切的直线方程：__▲__.

15. 已知函数$f(x)=|x|(1-\frac{2}{2^x+1})$，若存在$m\in[1,3]$，使得不等式$f(4+3m)+f(m^2-ma)\geqslant 0$成立，则实数$a$的取值范围是__▲__.

16. 沈括是北宋一名卓越的科学家，出生于浙江钱塘，也就是如今的浙江杭州，他博学多才、善于观察，在天文、数学、地理、生物、医学、物理领域都有研究，在数学上开创了“隙积术”. 如图，这是一底层为长方形的“堆垛”，堆垛每层长、宽的球的个数都比相邻下层少一个，其中c，d为底层长、宽的球的个数，n为总层数. 若$c=d=10$，$n=7$，则该堆垛球的总个数为__▲__，若$c=2n$，$d=2n+1$，则该堆垛球的总个数为__▲__.（用n表



示,参考公式:$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)(第一空 2 分,第二空 3 分)

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

已知数列$\{a_n\}$是单调递增的等比数列,a_1,a_2+1,a_3 成等差数列,前 3 项和是 14.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

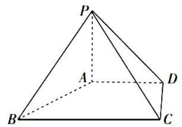
(2)令 $b_n=\log_2(a_na_{n+1})$,求证:$\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\frac{1}{b_3b_4}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}<\frac{1}{6}$.

18.(12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,$AD\parallel BC$,$PB=\sqrt{2}$,$AB=AD=CD=AP=1$,$BC=2$.

(1)求证:$PC\perp AB$;

(2)求平面 PCD 与平面 PAB 所成夹角的正弦值.



19.(12 分)

在①$b\cos C+\sqrt{3}b\sin C=a+c$;②$c\cos A+a\sin A\sin B=a\cos A\cos B+2b\cos B$ 这两个条件中任选一个,补充到下面的问题中,并解答问题:

在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且________.

(1)求 B;

(2)若$\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{DA}$,且$\triangle ABC$ 的面积为$\sqrt{3}$,求 BD 的最小值.

20.(12分)

乒乓球是中国的“国球”,多年来,我国运动员在各类国际大赛中取得了耀眼的成绩. 某高中为了宣扬乒乓球运动的精神,举办乒乓球比赛,同时为参加校际比赛选拔种子选手. 通过选拔,最后决出3名高一学生和4名高二学生作为种子选手进行培养.

(1)若最终选派2名学生作为校队参加校际比赛,且每位种子选手被选中的可能性相同,X表示校队中高一学生的人数,求X的分布列和期望值.

(2)甲乙两名学生代表学校出赛,赛前进行训练比赛,遵循换发球规则,规定比分相加逢双数换发球. 例如甲发两球,然后乙再发两球,如此循环. 甲在发球局得1分的概率为0.8,乙在发球局得1分的概率为0.5,且每局得分相互独立. 由于甲的实力比乙强得多,乙提出了如下不公平的比赛规则:由乙先发球,且甲在乙得3分之前得4分,则甲胜,乙在甲得4分之前得3分,则乙胜. 依照这样的规则,谁获胜的可能性更大?

21.(12分)

已知双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,过右焦点$F(2,0)$作渐近线的垂线,垂足在直线$l:x=\frac{1}{2}$上.

(1)求双曲线E的标准方程;

(2)点P在双曲线E上,且位于第一象限,$PF\perp x$轴,过F的直线与双曲线E交于A,B两点,同时与直线l交于点Q,直线PA,PB,PQ的斜率分别记为k_1,k_2,k_3. 试问是否存在常数λ,使得$k_1+k_2=\lambda k_3$恒成立?若存在,求出λ;若不存在,请说明理由.

22.(12分)

已知函数$f(x)=\frac{\ln x+2}{x}-\frac{a}{3}x$.

(1)当$a=3$时,求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)当$a>0$时,若函数$g(x)=x^2f(x)$存在最大值,求a的取值范围.