淮安市 2022~2023 学年度第一次调研测试

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. C　2. C　3. A　4.A　5.C　6. D　7.A　8.B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.AD　10. ABD　11. ABD　12.AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. -120　14. 27　15. $15\sqrt{2}$　16. 5

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a\cos B+b\cos A=2c\cos C$.

（1）求角 C；

（2）若 $c=2$，求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围.

17. （1）由正弦定理，得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos C$，

即 $\sin(A+B)=2\sin C\cos C$，即 $\sin C=2\sin C\cos C$，　……………………2 分

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，

所以 $\cos C=\dfrac{1}{2}$，故 $C=\dfrac{\pi}{3}$.　……………………………………4 分

（2）由正弦定理，得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin A$，$b=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin B$，　……………………5 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长 $L=a+b+c=\dfrac{4}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin B)+2$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}[\sin A+\sin(\frac{2\pi}{3}-A)]+2$$

$$=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A)+2$$

$$=4\sin(A+\frac{\pi}{6})+2,$$　……………………………8 分

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形可知，$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2},\\ 0<B=\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 得 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\dfrac{\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\sin(A+\dfrac{\pi}{6})\in(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为 $(2+2\sqrt{3},6]$.　……………………10 分

18. （12 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_3=14$，$S_6=126$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n=4^n-1$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

18. (1) 设数列$\{a_n\}$的公比为q.

$\begin{cases} S_3=a_1+a_2+a_3=14 & ① \\ S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=112 & ② \end{cases}$，$\frac{②}{①}$得$q^3=8$，所以$q=2$ ……………………3 分

有$S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+2a_1+4a_1=14$，得$a_1=2$，

则数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$.

(注：若使用等比求和公式没有讨论公比$q=1$，扣 1 分) ……………………5 分

(2) 由$2^nb_1+2^{n-1}b_2+\cdots+2b_n=4^n-1$，$n=1$时$2b_1=3$，得$b_1=\frac{3}{2}$. ……………6 分

所以$n\geqslant 2$时，$2^{n-1}b_1+2^{n-2}b_2+\cdots+2b_{n-1}=4^{n-1}-1$. ……………………………8 分

$2^nb_1+2^{n-1}b_2+\cdots+2b_n=2\left(2^{n-1}b_1+2^{n-2}b_2+\cdots+2b_{n-1}\right)+2b_n=4^n-1$ …………10 分

有$2\left(4^{n-1}-1\right)+2b_n=4^n-1$，得$n\geq 2$时，$b_n=4^{n-1}+\frac{1}{2}$……………………………11 分

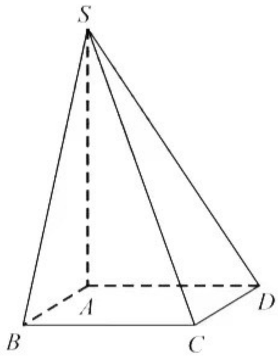
又$b_1=\frac{3}{2}$，故$b_n=4^{n-1}+\frac{1}{2}$ ……………………………………………………12 分

19. (12 分)

如图，在四棱锥$S-ABCD$中，侧面$SAD\perp$底面$ABCD$，$SA\perp AD$，且四边形$ABCD$为平行四边形，$AB=1$，$BC=2$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$SA=3$.

(1) 求二面角$S-CD-A$的大小；

(2) 点P在线段SD上且满足$\overrightarrow{SP}=\lambda\overrightarrow{SD}$，试确定$\lambda$的值，使得直线$BP$与面$PCD$所成角最大.



19. (1) 连接AC，在$\triangle ABC$，$AB=1,BC=2$，

$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理得$AC=\sqrt{3}$，所以$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$ ……………………2 分

因为侧面$SAD\perp$底面$ABCD$，面$SAD\cap$底面$ABCD=AD$，$SA\perp AD$，

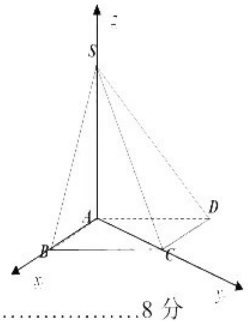
所以$SA\perp$面$ABCD$，所以$SA\perp AC$ ………………………………………………4 分

法 1： 以 A 为原点建立如图所示空间直角坐标系.

则 $B(1,0,0),C(0,\sqrt{3},0),S(0,0,3),D(-1,\sqrt{3},0)$， $\overrightarrow{CD}=(-1,0,0),\overrightarrow{SC}=(0,\sqrt{3},-3)$.

设平面 SCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0\end{cases}$， 得 $\begin{cases}x=0\\ \sqrt{3}y-3z=0\end{cases}$ ， 可取 $\vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$.



易知 $\vec{m}=(0,0,1)$ 为面 $ABCD$ 的法向量. ……………………6 分

所以 $\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+3}}=\dfrac{1}{2}$.

因为二面角 $S-CD-A$ 为锐角，

所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.即二面角 $S-CD-A$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………8 分

法 2： 因为 $SA\perp$ 面$ABCD$， 所以 $SA\perp CD$.

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形， 所以 $AC\perp CD$，

又 $SA\cap AC=A$， 所以 $CD\perp$ 面SAC， 所以 $CD\perp SC$.

又 面$ACD\cap$面$SCD=CD$,所以 $\angle ACS$ 为二面角 $S-CD-A$ 的平面角……………6 分

因为 $\tan\angle ACS=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$， 二面角 $S-CD-A$ 为锐角， 所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

即二面角 $S-CD-A$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$ ……………………………………………8 分

（2） 设 $P(x_1,y_1,z_1)$， $\overrightarrow{SP}=\lambda\overrightarrow{SD}$， 得 $(x_1,y_1,z_1-3)=\lambda(-1,\sqrt{3},-3)$，

$x_1=-\lambda,y_1=\sqrt{3}\lambda,z_1=3-3\lambda$,所以 $P(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,3-3\lambda)$,所以 $\overrightarrow{BP}=(-\lambda-1,\sqrt{3}\lambda,3-3\lambda)$.

………………………………10 分

由（1）知平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$.

因为 $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BP}||\vec{n}|}=\dfrac{3\lambda+3-3\lambda}{2\sqrt{(\lambda+1)^2+(\sqrt{3}\lambda)^2+(3-3\lambda)^2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{13\lambda^2-16\lambda+10}}$，

所以当 $\lambda=\dfrac{8}{13}$ 时， $\cos\alpha$ 值最大， 即当 $\lambda=\dfrac{8}{13}$ 时， BP 与平面 PCD 所成角最大.

………………………………12 分

20. （12 分）

设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，若椭圆 E 上的点到直线 $l:x=\dfrac{a^2}{c}$ 的最小距离为 $3-\sqrt{3}$.

（1） 求椭圆 E 的方程;

（2） 过 F_1 作直线交椭圆 E 于 A， B 两点，设直线 AF_2， BF_2 与直线 l 分别交于 C， D 两点，线段 AB， CD 的中点分别为 M， N， O 为坐标原点，若 M， O， N 三点共线，求直线 AB 的方程.

20. （1） 由条件知， $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\ \dfrac{a^2}{c}-a=3-\sqrt{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$ 所以 $b^2=a^2-c^2=2$，

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………4 分

（2） 由（1）知， $F_1(-1,0)$， $F_2(1,0)$，

由题意知， 直线 AB 的斜率不为 0， 设直线 AB 的方程为 $x=my-1$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$ 消去x并整理得，$(2m^2+3)y^2-4my-4=0$．

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=\dfrac{4m}{2m^2+3}$，$y_1y_2=\dfrac{-4}{2m^2+3}$．……………6分

所以$y_M=\dfrac{2m}{2m^2+3}$，$x_M=my_M-1=\dfrac{-3}{2m^2+3}$，

所以直线OM的斜率为$k_{OM}=\dfrac{y_M}{x_M}=-\dfrac{2m}{3}$．

直线AF_2的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，直线$l$的方程为$x=3$，则$C(3,\dfrac{2y_1}{x_1-1})$，

直线BF_2的方程为$y=\dfrac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，同理有$D(3,\dfrac{2y_2}{x_2-1})$．…………………8分

$$y_N=\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}=\frac{y_1}{my_1-2}+\frac{y_2}{my_2-2}$$

$$=\frac{y_1(my_2-2)+y_2(my_1-2)}{(my_1-2)(my_2-2)}=\frac{2my_1y_2-2(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2-2m(y_1+y_2)+4}$$

$$=\frac{2m\cdot\dfrac{-4}{2m^2+3}-2\times\dfrac{4m}{2m^2+3}}{m^2\cdot\dfrac{-4}{2m^2+3}-2m\cdot\dfrac{4m}{2m^2+3}+4}=\frac{4m}{m^2-3}．$$ ……………………………10分

所以直线ON的斜率为$k_{ON}=\dfrac{y_N}{x_N}=\dfrac{4m}{3(m^2-3)}$．

由M、O、N三点共线可得，$k_{OM}=k_{ON}$，即$-\dfrac{2m}{3}=\dfrac{4m}{3(m^2-3)}$，

所以$m=0$或$m=\pm1$．

故直线AB的方程为$x=-1$或$x-y+1=0$或$x+y+1=0$．………………12分

21．（12分）

第22届世界杯于2022年11月21日到12月18日在卡塔尔举办．在决赛中，阿根廷队通过点球战胜法国队获得冠军．

（1）扑点球的难度一般比较大，假设罚点球的球员会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向射门，门将也会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向来扑点球，而且门将即使方向判断正确也有$\dfrac{2}{3}$的可能性扑不到球．不考虑其它因素，在一次点球大战中，求门将在前三次扑到点球的个数X的分布列和期望；

（2）好成绩的取得离不开平时的努力训练，甲、乙、丙三名前锋队员在某次传接球的训练中，球从甲脚下开始，等可能地随机传向另外2人中的1人，接球者接到球后再等可能地随机传向另外2人中的1人，如此不停地传下去，假设传出的球都能接住．记第n次传球之前球在甲脚下的概率为p_n，易知$p_1=1,p_2=0$．

①试证明：$\{p_n-\dfrac{1}{3}\}$为等比数列；

②设第n次传球之前球在乙脚下的概率为q_n，比较p_{10}与q_{10}的大小．

21．（1）依题意可得，门将每次可以扑到点球的概率为$p=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$，…………………1分

门将在前三次扑到点球的个数 X 可能的取值为 0，1，2，3，易知 $X \sim B(3,\frac{1}{9})$，

所以 $P(X=k)=C_3^k\times(\frac{1}{9})^k\times(\frac{8}{9})^{3-k}$，$k=0,1,2,3$，……………………………2 分

故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

所以 X 的期望 $E(X)=3\times\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$．……………………………………………………6 分

（2）①第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n，

则当 $n\geqslant 2$ 时，第 $n-1$ 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_{n-1}，

第 $n-1$ 次传球之前球不在甲脚下的概率为 $1-p_{n-1}$，

则 $p_n=p_{n-1}\times 0+(1-p_{n-1})\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}$，……………………………………8 分

即 $p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}(p_{n-1}-\frac{1}{3})$，又 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

所以 $\{p_n-\frac{1}{3}\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列．…………………………10 分

②由①可知 $p_n=\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}$，所以 $p_{10}=\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^9+\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$，

所以 $q_{10}=\frac{1}{2}(1-p_{10})=\frac{1}{2}[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^9]>\frac{1}{3}$，

故 $p_{10}<q_{10}$．……………………………………………………………………12 分

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x+\cos x+\frac{1}{2}x^2$，其中 a 为实数，e 是自然对数的底数．

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2},f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程；

（2）若 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，$g(x)$ 在 $(0,\ \pi)$ 上有两个极值点，求 a 的取值范围．

22．（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f'(x)=-\sin x+x$，

所以 $f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1$，……………………………………………………………1 分

又 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{8}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2},f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $y=(\frac{\pi}{2}-1)x-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}$………3 分

（2）$g(x)=ae^x-\sin x+x$，$\therefore g'(x)=ae^x-\cos x+1$，

$g(x)$ 在 $(0,\ \pi)$ 上有两个极值点，即 $g'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个变号零点，

令 $g'(x)=0$ 得 $ae^x-\cos x+1=0$，$\therefore a-\dfrac{\cos x-1}{e^x}=0$，……………………5 分

$\therefore h(x)=a-\dfrac{\cos x-1}{e^x}$，$\therefore h'(x)=\dfrac{\sin x+\cos x-1}{e^x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-1}{e^x}$，

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\in(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]\therefore h'(x)>0\therefore h(x)$ 单调增，

当 $x\in(\dfrac{\pi}{2},\ \pi)$ 时，$\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\in(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})\therefore h'(x)<0\therefore h(x)$ 单调减， ……7 分

$\therefore h(0)=a,h(\dfrac{\pi}{2})=a+e^{-\frac{\pi}{2}}$，$h(\pi)=a+2e^{-\pi}$，

当 $-e^{-\frac{\pi}{2}}<a<-2e^{-\pi}$ 时，$h(0)<0,h(\dfrac{\pi}{2})>0,h(\pi)<0$，

$\therefore \exists x_1\in(0,\dfrac{\pi}{2}),x_2\in(0,\pi)$ 使 $h(x_1)=h(x_2)=0$，……………………………9 分

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$h(x)<0,g'(x)<0,g(x)$ 单调减，

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$h(x)>0,g'(x)>0,g(x)$ 单调增，

当 $x\in(x_2,\ \pi)$ 时，$h(x)<0,g'(x)<0,g(x)$ 单调减，

即 $-e^{-\frac{\pi}{2}}<a<-2e^{-\pi}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\ \pi)$ 上有两个极值点.

………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。