

# 府谷中学高二年级第二学期第二次月考

## 数学试题(文科)

座位号

考号

姓名

班级

学校

### 考生注意:

- 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
- 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
- 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
- 本卷命题范围:高考范围。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 集合  $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $N = \{x | -2 < x < 5\}$ , 则  $M \cap N =$   
A.  $\{1, 3\}$       B.  $\{1, 3, 5\}$   
C.  $\{1, 3, 5, 7\}$       D.  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
- 若  $(a+bi)(2+i) = 3+2i$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $i$  为虚数单位), 则  $a+b =$   
A.  $\frac{9}{5}$       B.  $\frac{6}{5}$       C.  $\frac{4}{5}$       D.  $\frac{2}{5}$
- 命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + x_0 + 1 > 0$ ”的否定是  
A.  $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + x_0 + 1 \leqslant 0$   
C.  $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + x_0 + 1 < 0$   
B.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 < 0$   
D.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leqslant 0$
- 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 若  $a_3 + a_9 + a_{15} = 18$ , 则  $S_{17} =$   
A. 102      B. 112      C. 192      D. 204
- 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 3x+y \geqslant 1, \\ x+2y \leqslant 2, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ , 则  $z = 3x-y$  的最大值是  
A. -1      B. 1      C. 6      D.  $\frac{19}{3}$
- $\frac{\sin 160^\circ \cos 20^\circ}{1-2\sin^2 25^\circ}$  等于  
A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       D. 2

7. 已知函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 在  $[0, \pi]$  上恰有 3 个零点, 则整数  $\omega$  的值为

- A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

8. 放射性核素锶 89 的质量  $M$  会按某个衰减率衰减, 设初始质量为  $M_0$ , 质量  $M$  与时间  $t$  (单位: 天)

的函数关系为  $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$  (其中  $h$  为常数), 若锶 89 的半衰期 (质量衰减一半所用的时间) 约为 50 天, 那么质量为  $M_0$  的锶 89 经过 30 天衰减后质量大约变为 (参考数据:  $2^{0.6} \approx 1.516$ )

- A.  $0.72M_0$       B.  $0.70M_0$   
C.  $0.68M_0$       D.  $0.66M_0$

9. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为

- A. 3      B. 2  
C. 1      D.  $\frac{1}{3}$

10. 若双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线被圆  $(x+2)^2 + y^2 = 4$  所截得的弦长为  $2\sqrt{3}$ , 则  $C$  的离心率为

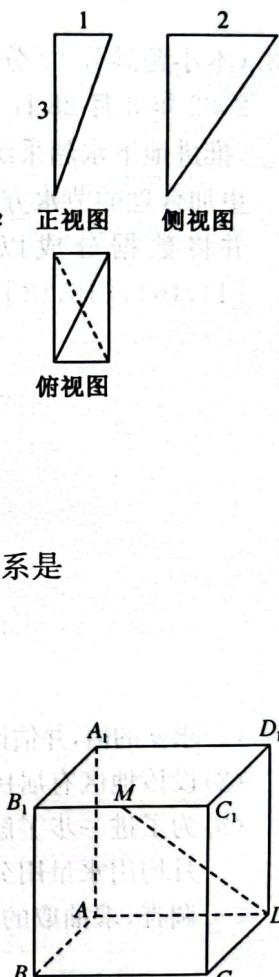
- A.  $\sqrt{3}$       B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$   
C.  $\sqrt{2}$       D.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

11. 已知  $a = \ln \frac{1}{98} + \frac{97}{98}, b = \ln \frac{1}{99} + \frac{98}{99}, c = \ln \frac{1}{100} + \frac{99}{100}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是

- A.  $a > c > b$   
B.  $a > b > c$   
C.  $c > a > b$   
D.  $c > b > a$

12. 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2, 点  $M$  是棱  $B_1C_1$  的中点, 点  $P$  是正方体表面上的动点. 若  $DM \perp C_1P$ , 则  $P$  点在正方体表面上运动所形成的轨迹的长度为

- A.  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$   
B.  $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$   
C.  $\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$   
D.  $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $\mathbf{a} = (2, 4), 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = (7, 5)$ , 则  $|\mathbf{b}| =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = x^3 - 3\ln x + \sqrt{3}x$  的图象在点  $(1, f(1))$  处的切线为  $l$ , 则直线  $l$  的倾斜角为 \_\_\_\_\_.

15. 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $\frac{S_{10}}{S_5} = 5$ , 则  $\frac{S_{15}}{S_{10}} =$  \_\_\_\_\_.

16. 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(-x) = -f(x)$ , 函数  $f(x+1)$  为偶函数, 且当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = \log_2(x+a)$ , 则  $f(2022) + f(2023) =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

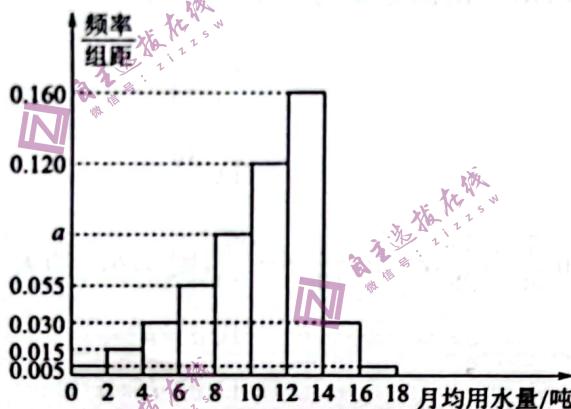
在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，且  $b\cos C + \sqrt{3}b\sin C = a + c$ 。

(1) 求角  $B$ ；

(2) 若  $b=2$ ， $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ ，求  $c$  的值。

18. (本小题满分 12 分)

2022 年 3 月 28 日是第三十届“世界水日”，我国将 3 月 22~28 日确定为“中国水周”，并将“推进地下水超采综合治理，复苏河湖生态环境”作为相关宣传活动的主体。某地区为了制定更加合理的节水方案，通过随机抽样，调查了上一年度 200 户居民的月均用水量（单位：吨），并将数据分成以下 9 组： $[0,2), [2,4), [4,6), [6,8), [8,10), [10,12), [12,14), [14,16), [16,18]$ ，制成了频率分布直方图如图所示。



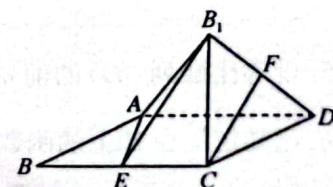
- (1) 求  $a$  的值，并估计该地区居民的月均用水量（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；
- (2) 设该地区有居民 20 万户，估计该地区居民的月均用水量不低于 14 吨的户数；
- (3) 为了进一步了解居民的节水、用水情况，在月均用水量为  $[2,4)$  和  $[14,16)$  的两组中，按月均用水量用分层抽样的方法抽取 6 户居民，再从这 6 户居民中随机抽取 2 户进行问卷调查，求抽取的这 2 户居民来自不同组的概率。

19. (本小题满分 12 分)

如图，已知在菱形  $ABCD$  中， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $E$  为  $BC$  的中点，将  $\triangle ABE$  沿  $AE$  翻折成  $\triangle AB_1E$ ，连接  $B_1C$  和  $B_1D$ ， $F$  为  $B_1D$  的中点。

(1) 求证：平面  $AB_1E \perp$  平面  $B_1EC$ ；

(2) 求异面直线  $AB_1$  与  $CF$  所成角的大小。



## 20. (本小题满分 12 分)

已知  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3a^2x$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 当  $a=1$  时, 判断  $f(x)$  的零点个数.

## 21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $E$  的中心为坐标原点, 对称轴为  $x$  轴、 $y$  轴, 且过  $A(2, -1)$ ,  $B\left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$  两点.

(1) 求  $E$  的方程;

(2) 若直线  $l$  与圆  $O: x^2 + y^2 = \frac{8}{5}$  相切, 且直线  $l$  交  $E$  于  $M, N$  两点, 试判断  $\angle MON$  是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

## 22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知直线  $l: mx + y - 2m = 0 (m \in \mathbb{R})$ , 以  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 圆  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 4(\sin \theta + \cos \theta)$ .

(1) 求直线  $l$  的极坐标方程和圆  $C$  的一个参数方程;

(2) 若直线  $l$  与圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = 2\sqrt{6}$ , 求  $m$  的值.

## 23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = |x^2 - 1| + |x - 2|$ .

(1) 解不等式  $f(x) \geq 3$ ;

(2) 若  $f(a) \leq |a^2 + a - 3|$ , 求满足条件的实数  $a$  的取值范围.