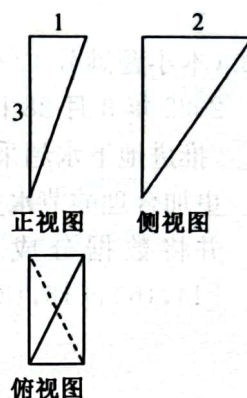


7. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \pi]$ 上恰有 3 个零点, 则整数 ω 的值为
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

8. 放射性核素铯 89 的质量 M 会按某个衰减率衰减, 设初始质量为 M_0 , 质量 M 与时间 t (单位: 天) 的函数关系为 $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$ (其中 h 为常数), 若铯 89 的半衰期 (质量衰减一半所用的时间) 约为 50 天, 那么质量为 M_0 的铯 89 经过 30 天衰减后质量大约变为 (参考数据: $2^{0.6} \approx 1.516$)
- A. $0.72M_0$ B. $0.70M_0$
C. $0.68M_0$ D. $0.66M_0$

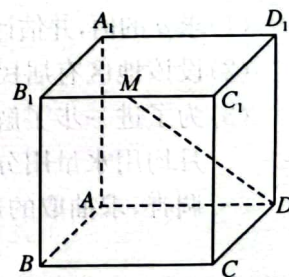
9. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为
- A. 3 B. 2
C. 1 D. $\frac{1}{3}$



10. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线被圆 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 则 C 的离心率为
- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

11. 已知 $a = \ln \frac{1}{98} + \frac{97}{98}, b = \ln \frac{1}{99} + \frac{98}{99}, c = \ln \frac{1}{100} + \frac{99}{100}$, 则 a, b, c 的大小关系是
- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$
C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

12. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 M 是棱 B_1C_1 的中点, 点 P 是正方体表面上的动点. 若 $DM \perp C_1P$, 则 P 点在正方体表面上运动所形成的轨迹的长度为
- A. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$
C. $\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 a, b 满足 $a = (2, 4), 2a - b = (7, 5)$, 则 $|b| =$ _____.
14. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3\ln x + \sqrt{3}x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l , 则直线 l 的倾斜角为 _____.
15. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_{10}}{S_5} = 5$, 则 $\frac{S_{15}}{S_{10}} =$ _____.
16. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 函数 $f(x+1)$ 为偶函数, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \log_2(x+a)$, 则 $f(2022) + f(2023) =$ _____.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

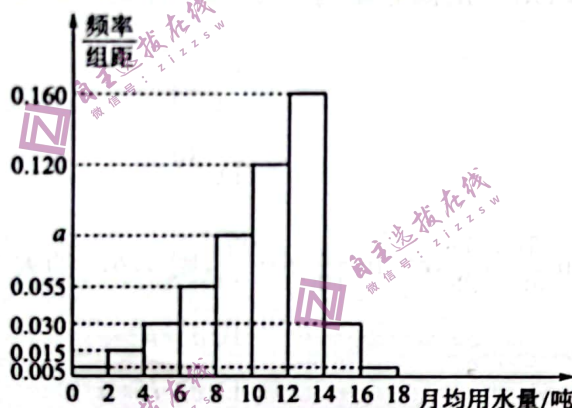
在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b \cos C + \sqrt{3} b \sin C = a + c$.

(1)求角 B ;

(2)若 $b=2, \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 c 的值.

18. (本小题满分 12 分)

2022 年 3 月 28 日是第三十届“世界水日”,我国将 3 月 22~28 日确定为“中国水周”,并将“推进地下水超采综合治理,复苏河湖生态环境”作为相关宣传活动的主体.某地区为了制定更加合理的节水方案,通过随机抽样,调查了上一年度 200 户居民的月均用水量(单位:吨),并将数据分成以下 9 组: $[0, 2), [2, 4), [4, 6), [6, 8), [8, 10), [10, 12), [12, 14), [14, 16), [16, 18]$, 制成了频率分布直方图如图所示.



(1)求 a 的值,并估计该地区居民的月均用水量(同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);

(2)设该地区有居民 20 万户,估计该地区居民的月均用水量不低于 14 吨的户数;

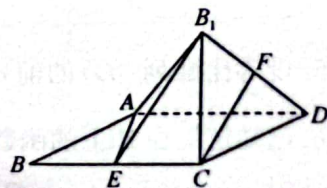
(3)为了进一步了解居民的节水、用水情况,在月均用水量为 $[2, 4)$ 和 $[14, 16)$ 的两组中,按月均用水量用分层抽样的方法抽取 6 户居民,再从这 6 户居民中随机抽取 2 户进行问卷调查,求抽取的这 2 户居民来自不同组的概率.

19. (本小题满分 12 分)

如图,已知在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 120^\circ$, E 为 BC 的中点,将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折成 $\triangle AB_1E$, 连接 B_1C 和 B_1D , F 为 B_1D 的中点.

(1)求证:平面 $AB_1E \perp$ 平面 B_1EC ;

(2)求异面直线 AB_1 与 CF 所成角的大小.



20. (本小题满分 12 分)

$$\text{已知 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3a^2x.$$

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 当 $a=1$ 时, 判断 $f(x)$ 的零点个数.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $A(2, -1), B(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 两点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 若直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{8}{5}$ 相切, 且直线 l 交 E 于 M, N 两点, 试判断 $\angle MON$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l: mx + y - 2m = 0 (m \in \mathbf{R})$, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 4(\sin \theta + \cos \theta)$.

- (1) 求直线 l 的极坐标方程和圆 C 的一个参数方程;
- (2) 若直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2\sqrt{6}$, 求 m 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x^2 - 1| + |x - 2|$.

- (1) 解不等式 $f(x) \geq 3$;
- (2) 若 $f(a) \leq |a^2 + a - 3|$, 求满足条件的实数 a 的取值范围.