

张家口市2022—2023学年度高三年级第一学期期末考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.D

【解析】由 $U = \{x | 1 \leq x \leq 10\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 得 $(\complement_U A) \cap B = \{4, 5, 6\}$, 故选D.

2.A

【解析】 $z = 5i2 + i + 2i = 1 + 4i$, 故 $\bar{z} = 1 - 4i$, 故选A.

3.C

【解析】由题意, 得 $8 \times 75\% = 6$, 所以 $a = 8 + 102 = 9$. 小于 a 的有6个数, 所以随机取两个数都小于 a 的概率为 $P = \frac{2628}{C^2_{10}} = \frac{1528}{1528}$, 故选C.

4.B

【解析】当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 又函数 $f(x)$ 为偶函数, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

由 $f(x^2 - x) + f(x) > 0$, 得 $f(x^2 - x) > -f(x)$, 所以 $f(x^2 - x) < f(x)$, 故 $x^2 - x < x - 1$, 解得 $0 < x < 2$, 故选B.

5.B

【解析】设碾滚的高为 l , 其底面圆的半径为 r .

由题意知, 推动拉杆绕碾盘转动2周, 碾滚恰好滚动了5圈, 则 $2 \times 2\pi l = 5 \times 2\pi r$, 所以 $l2r = 54$, 故圆柱形碾滚的高与其底面圆的直径之比约为5:4. 故选B.

6.A

【解析】因为 $a_9 = a_1 + 8d = 0$, $a_1 \neq 0$, 所以 $d = -a_1/8 \neq 0$.

$a_1 + a_8 + a_{11} + a_{16} = (a_1 + a_{16}) + (a_8 + a_{11}) = a_8 + a_9 + a_9 + a_{10} = 4a_9 = 0$,

而 $a_7 + a_8 + a_{14} = a_8 + a_7 + a_{14} = a_8 + a_{10} + a_{11} = 2a_9 + a_{11} = a_{11} = a_1 + 10d = -14a_1 \neq 0$,

所以 $a_1 + a_8 + a_{11} + a_{16} \neq a_7 + a_8 + a_{14}$. 故选A.

7.C

【解析】由 $1^2 + 1^2 - 4 \times 1 + 2 \times 1 = 0$, 得点 $P(1, 1)$ 在圆上. 设切线的斜率为 k .

因为圆的标准方程为 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$, 所以圆心为 $E(2, -1)$, 半径为 $\sqrt{5}$,



8.D

綜上 $b < a < c$, 故選 D

9.BC

10 AC

设 $A(rc)(a|vs4|a|col(x1, y1))$, $B(rc)(a|vs4|a|col(x2, y2))$, 则 $21x16+21y12=1$, $22x16+22y12$

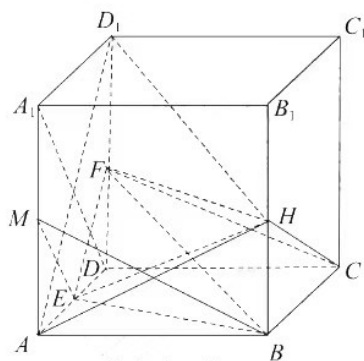
$$=1, x_1+x_2=2, y_1+y_2=1,$$

故 $2(2x-x_1)+2(2y-y_1)=0$, 所以 $18 \times x_1+x_2+16 \times y_1+y_2 \times y_1-y_2x_1-x_2=0$, 故 $y_1-y_2x_1-x_2=-32$,

所以直线 l 的方程为 $y-1=-32(x-2)$, 化简得 $3x+2y-8=0$. 所以 D 错误.

11. BCD

【解析】如图, 设 M 为 AA_1 的中点, 则 $ME \parallel A_1D$, 由题意, 得 $BE=BM=5$, $EM=2$, 所以 EM 与 BE 不垂直, 即 A_1D 与 BE 不垂直, 所以直线 A_1D 与平面 BEF 不垂直, 所以 A 错误;



因为 E, F, H 分别为 AD, DD_1, BB_1 的中点, 所以 $AD_1 \parallel EF, D_1H \parallel FB$.

又 $AD_1 \cap D_1H = D_1, EF \cap FB = F$, 所以平面 $AHD_1 \parallel$ 平面 EFB .

又 $AH \subset$ 平面 AHD_1 , 所以直线 $AH \parallel$ 平面 BEF , 所以 B 正确;

因为 F, H 分别为 DD_1, BB_1 的中点, 所以 $BH \perp FH$.

又 $BH=1, FH=2$, 所以 $S_{\triangle BHF} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$.

易得点 E 到平面 BHF 的距离为 $\frac{2}{3}$, 所以三棱锥 $H-EFB$ 的体积 $V_{H-EFB} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$,

所以 C 正确;

因为 $BC \perp$ 平面 $CDD_1C_1, FC \subset$ 平面 CDD_1C_1 , 所以 $BC \perp FC$, 又 $BH \perp FH$, 故 FB 为三棱锥 $H-CFB$ 的外接球的直径. 又 $FC=3$, 所以三棱锥 $H-CFB$ 的外接球的表面积 $S = 4\pi \times (\frac{3}{2})^2 = 9\pi$, 所以 D 正确.

12. ABD

【解析】由 $x - \log_2 x = 0$, 得 $xx - 1 = 2^x$. 由 $x - \log_2 x = 0$, 得 $xx - 1 = \log_2 x$.

设 $y = xx - 1$, 则 $x = yy - 1$,

所以函数 $y = xx - 1$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 所以 a, b 是函数 $y = 2^x$ 和 $y = \log_2 x$ 的图象与函数 $y = xx - 1$ 的图象的交点的横坐标, 故 $a = \log_2 b, b = 2^a$, 所以 A 正确;

由 $b = 2^a = aa - 1$, 得 $a + b = ab$, 所以 $1a + 1b = 1$, 故 B 正确;

$a + b = a + aa - 1 = a - 1 + 1a - 1 + 2 > 4$, 故 C 错误;

因为 $b - a = 2^a - a$, 设 $f(x) = 2^x - x$, 则 $f'(x) = 2^x \ln 2 - 1$,

当 $m > 1$ 时, $f'(x) = 2^x \ln 2 - 1 > 0$,

所以当 $m > 1$ 时, 函数 $f(x) = \ln(m) - 2^m - m$ 单调递增, 故 $f(x) = \ln(m) - 2^m - m > \ln(1) - 2^1 - 1 = 1 - 2 - 1 = -2$, 即 $b - a > 1$,

所以 D 正确.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. -4

【解析】因为 $a \parallel b$, 所以 $2\lambda - 4 = 3\lambda$, 所以 $\lambda = -4$.

14. $x^2 - y^2 = 1$

【解析】由题意, 得 $23 = 2c\sqrt{1 + 4}$, 所以 $c = 15$. 又 $ba = 2$, $a^2 + b^2 = c^2$, 解得 $a^2 = 3$, $b^2 = 12$, 所以双曲线 C 的方程为 $x^2 - y^2 = 1$.

15. $-e^2$

【解析】根据题意, 得 l 与函数 $f(x) = \ln(x)$ 的切点为 $(1, a)$, 设 l 与函数 $g(x) = e^x$ 的切点为 (x_2, e^{x_2}) ,

又 $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = e^x$, 所以 $k = 2a = e^{x_2}$,

所以切线 l 的方程为 $y - a = 2a(x - 1)$, 即 $y = 2ax - a$.

同时切线 l 的方程也为 $y - e^{x_2} = e^{x_2}(x - x_2)$, 即 $y = e^{x_2}x + e^{x_2} - x_2e^{x_2}$,

所以 $-a = e^{x_2} - x_2e^{x_2} = b$,

解得 $x_2 = 32$, 所以 $b = -e^2$.

16. 3; $(34, 2)$

【解析】以 BC 所在直线为 x 轴, BC 的中点为原点建立直角坐标系, 则 $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$.

设 $A(x, y)$, 由 $c = 3b$, 得 $\cos(\angle ABC) = \cos(\angle ACB)$,

所以 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$, 化简得 $x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$, $y \neq 0$.

所以点 A 到 BC 的最大距离为圆 $x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$ 的半径 32,

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $S = \frac{1}{2} \times |BC| \times 32 = 3$.

由正弦定理, 得 $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. 因为 $\frac{1}{2}(4 + b + 3b) = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3}{2}b^2 \sin A$, 所以 $\frac{1}{2}(4 + b + 3b) = \frac{3}{2}b^2 \sin A$, 故 $\frac{1}{2}(4 + b + 3b) = \frac{3}{2}b^2 \sin A$, 由 $b + 3b > 4$, $b + 4 > 3b$, 得 $1 < b < 2$.

令 $f(x) = x^2 + x(1 < x < 2)$, 则 $f'(x) = 2x(1 + x) - x^2(1 + x)^2 = x^2 + 2x(1 + x)^2 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 的值域为 $(12, 43)$, 所以 $2R$ 的取值范围是 $(34, 2)$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

解: (1) 由直方图, 得平均数的估计值为

$4 \times (2 \times 0.0125 + 6 \times 0.0375 + 10 \times 0.05 + 14 \times 0.075 + 18 \times 0.0375 + 22 \times 0.025 + 26 \times 0.0125) = 13.4$ (分), 3 分

因为 $4 \times (0.0125 + 0.025 + 0.0375) = 0.3$ ，所以有 30% 的居民排队时长超过 16 分钟，

综上，估计该社区居民核酸采集排队时间的平均时长为 13.4 分钟，在一次核酸采集中该社区有 30% 的居民排队时长超过 16 分钟。……………5 分

(2) 由(1)可知样本中有 $30\% \times 100 = 30$ (人) 排队时长超过 16 分钟。……………6 分

又两小区的居住人数之比为 9 : 11，故在 A 小区抽取了 45 人，在 B 小区抽取了 55 人，

……………7 分

故填表如下：

	排队时间超过 16 分钟	排队时间不超过 16 分钟	合计
A 小区	20	25	45
B 小区	10	45	55
合计	30	70	100

……………8 分

零假设为 H_0 ：排队时间是否超过 16 分钟与所属小区相互独立，即排队时间是否超过 16 分钟与所属小区无关，

$$\chi^2 = \frac{100 \times (20 \times 45 - 10 \times 25)}{230 \times 70 \times 45 \times 55} \approx 8.13 > 6.635 = \chi_{0.01}^2$$

……………9 分

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即排队时间是否超过 16 分钟与所属小区有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.01。……………10 分

18. (本小题满分 12 分)

(1) 证明：由题意，得 $a_1 = S_1 = 2a_1 - 4 \times 1 + 2$ ，所以 $a_1 = 2$ ， $a_1 + 4 = 6$ 。……………1 分

由 $S_n = 2a_n - 4n + 2$ ，得 $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 4(n-1) + 2$ ， $n \geq 2$ ，

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = (2a_n - 4n + 2) - (2a_{n-1} - 4(n-1) + 2) = 2a_n - 2a_{n-1} - 4$ ， $n \geq 2$ ，……………3 分

所以 $a_n = 2a_{n-1} + 4$ ， $n \geq 2$ ，故 $a_n + 4 = 2(a_{n-1} + 4)$ ， $n \geq 2$ ，……………4 分

所以数列 $\{a_n + 4\}$ 是以 6 为首项，2 为公比的等比数列。……………5 分

(2) 解：由(1)得 $a_n + 4 = 6 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n$ ，故 $a_n = 3 \times 2^n - 4$ ，……………6 分

则 $na_n = 3n \cdot 2^n - 4n$ 。……………7 分

设 $b_n = n \cdot 2^n$ ，其前 n 项和为 P_n ，

则 $P_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \dots + n \times 2^n$ ，

$2P_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + n \times 2^{n+1}$ ，

所以 $-P_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - n \times 2^{n+1} = -2 + 2^{n+1} - n \times 2^{n+1}$ ，

所以 $P_n = (n-1)2^{n+1} + 2$ 。

2,10 分

所以 $T_n = 3P_n - 4 \times \frac{1}{2}n(n+1) = 3 \times \frac{1}{2}n(n+1) - 2n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)(3-4) = -\frac{1}{2}n(n+1)$

.....12 分

19.(本小题满分 12 分)

解: (1)由正弦定理, 得 $(a+b)(a-b) = (c+b)c$, 即 $a^2 - b^2 = c^2 + bc$,2 分

故 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc = -12$,

由余弦定理, 得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -12$, 所以 $A = 120^\circ$ 4 分

(2)由平面四边形内角和为 360° , 可知 $\angle ABC + \angle BEC = 90^\circ$ 5 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得 $BC \sin \angle BAC = AC \sin \angle ABC$, 即 $2 \times \frac{1}{2} \sin 120^\circ = b \sin \angle ABC$ 6 分

在 $\triangle BEC$ 中, 由正弦定理, 得 $BC \sin \angle BEC = EC \sin \angle EBC$, 即 $2 \sin \angle BEC = \frac{1}{2} \sin (90^\circ - \angle ABC)$ 7 分

所以 $\sin \angle ABC \cdot \sin (90^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{4}$ 8 分

又 $\sin \angle ABC \cdot \sin (90^\circ - \angle ABC) = \sin \angle ABC \cdot \cos \angle ABC = \frac{1}{2} \sin 2\angle ABC$, 所以 $\sin 2\angle ABC = \frac{1}{2}$,

故 $2\angle ABC = 30^\circ$, 即 $\angle ABC = 15^\circ$, 所以 $\angle ACB = 45^\circ$ 10 分

$\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

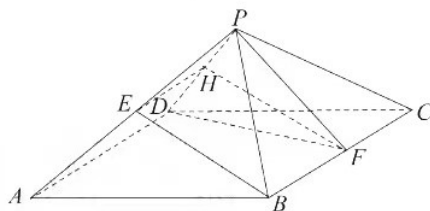
由正弦定理, 得 $2 \sin 120^\circ = b \sin 15^\circ = c \sin 45^\circ$, 所以 $c = 2 \sin 45^\circ \sin 120^\circ$, $b = 2 \sin 15^\circ \sin 120^\circ$,11 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \sin 45^\circ \sin 120^\circ \times 2 \sin 15^\circ \sin 120^\circ \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$ 12 分

20.(本小题满分 12 分)

(1)证明: 由 $AB = BC = CD = DA = 2$, 得 $AD \parallel BC$,1 分

设 F, H 分别为棱 BC 和棱 PD 的中点, 连接 PF, DF, HF, EH , 如图,



所以 $EH \parallel AD$, 故 $EH \parallel BC$, 故 $EH \parallel BF$,2 分

因为 $EB \perp BC$, 所以 $EH \perp BC$,3 分

因为 $PC = PB$, 所以 $PF \perp BC$.

又 $PF \subset$ 平面 PDF , $HF \subset$ 平面 PDF , $PF \cap HF = F$, 所以 $BC \perp$ 平面 PDF ,

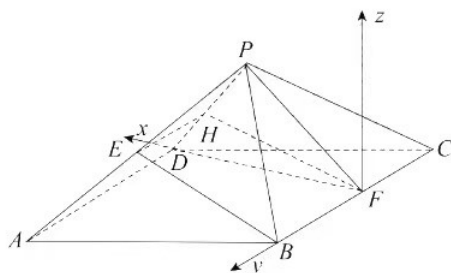
又 $PD \subset$ 平面 PDF , 所以 $BC \perp PD$4 分

(2)解: 由(1)知 $BC \perp$ 平面 PDF , 所以 $BC \perp DF$. 又 $DC=2$, $CF=1$, 故 $DF=3$.

因为 $BE=3/2$, 且 $BE \parallel FH$, 所以 $FH=3/2$. 因为 $PB=PC=BC=2$, F 为 BC 的中点, 所以 $PF=3/2$, 故 $PD=3$, $\triangle PDF$ 为等边三角形.

由 $BC \perp$ 平面 PDF , $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 得平面 $PDF \perp$ 平面 $ABCD$.

以 F 为坐标原点, 分别以直线 FD , FB 为 x , y 轴, 以过点 F 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $F-xyz$6 分



所以 $F(0, 0, 0)$, $D(3, 0, 0)$, $C(0, -1, 0)$, $P(3/2, 3/2, 3/2)$7 分

设 $m=(x_1, y_1, z_1)$ 为平面 PBC 的法向量, 则有 $m \cdot \overrightarrow{CF} = 0$, $m \cdot \overrightarrow{CP} = 0$,

即 $y_1=0$, $3x_1-3z_1=0$, 可取 $m=(3, 0, -1)$8 分

设 $n=(x_2, y_2, z_2)$ 为平面 PDC 的法向量, 则有 $n \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, $n \cdot \overrightarrow{CP} = 0$,

即 $3x_2-3z_2=0$, 可取 $n=(3, -3, 1)$10 分

所以 $|\cos \langle m, n \rangle| = 13/13$,

所以平面 PDC 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $13/13$12 分

21.(本小题满分 12 分)

(1)解: $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = -e^{ax} \ln(ax+1)$1 分

当 $a=0$ 时, $f'(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;2 分

当 $a>0$ 时, 在区间 $(-\infty, -1/a)$ 上, $f'(x) > 0$, 在区间 $(-1/a, +\infty)$ 上, $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1/a)$ 上单调递增, 在区间 $(-1/a, +\infty)$ 上单调递减;3 分

当 $a<0$ 时, 在区间 $(-\infty, -1/a)$ 上, $f'(x) < 0$, 在区间 $(-1/a, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1/a)$ 上单调递减, 在区间 $(-1/a, +\infty)$ 上单调递增.4 分

(2)证明: $f(x) = -xe^{ax} = -e^{ax + \ln x}$,5 分
要证 $\ln x + ax - 1 \geq If'(x)$, 即证 $\ln x + ax - 1 \geq 1 - e^{ax + \ln x}$,6 分
设 $g(x) = \ln x + ax - 1 + e^{ax + \ln x}$, 则 $g'(x) = 1 + e^{ax + \ln x}$,7 分
在区间 $(-\infty, 0)$ 上, $g'(x) < 0$, 在区间 $(0, +\infty)$ 上, $g'(x) > 0$,
所以函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,9 分
所以 $g(x) \geq g(0) = 0$,10 分
故 $\ln x + ax - 1 + e^{ax + \ln x} \geq 0$, 当 $\ln x + ax = 0$ 时等号成立,
所以 $\ln x + ax - 1 \geq 1 - e^{ax + \ln x}$ 成立,
故 $\ln x + ax - 1 \geq If'(x)$,12 分

22.(本小题满分 12 分)

解: (1)设 $E(x, y)$, 则 $EA = r$, 所以 $EA^2 = x^2 + (y - 2)^2 = r^2$,2 分
即 $(x - 6)^2 + y^2 = x^2 + 36$, 化简得 $y^2 = 12x$,3 分
(2)设 $P(x_0, y_0)$, 直线 PM 为 $y - y_0 = k_1(x - x_0)$, 直线 PN 为 $y - y_0 = k_2(x - x_0)$,
则 $y_0 = 12x_0$, $M(0, y_0 - k_1x_0)$, $N(0, y_0 - k_2x_0)$,4 分
故 $|MN| = (k_2 - k_1)x_0 = x_0|k_2 - k_1| \sqrt{1 + k_1^2} = 12x_0|k_2 - k_1| \sqrt{1 + k_1^2}$,5 分
又直线 PM 和直线 PN 与圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 相切, 所以 $d_1 = d_2 = 1$,
故 k_1, k_2 是方程 $|k_2 - k_1| \sqrt{1 + k_1^2} = 1$ 的两个根,6 分
即 k_1, k_2 是方程 $20(x - 2x_0)k^2 + 2y_0(1 - x_0)k + y_0 - 1 = 0$ 的两个根,
所以 $k_1 + k_2 = \frac{20(x - 2x_0)}{20x_0 - 1}$, $k_1k_2 = \frac{20y_0 - 1}{20x_0 - 1}$,8 分
则 $\triangle PMN$ 的面积 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2}|MN| \cdot |x_0| = \frac{1}{2} \cdot 12x_0|k_2 - k_1| \sqrt{1 + k_1^2} \cdot |x_0|$
 $= \frac{1}{2} \cdot 12x_0^2|k_2 - k_1| \sqrt{1 + k_1^2} = \frac{1}{2} \cdot 12x_0^2 \sqrt{(k_2 - k_1)^2 (1 + k_1^2)}$

$$\begin{aligned} & x_0) \supseteq 12(2^{\frac{1}{2}})(\sqrt[4]{a} \cos(x - 2x_0)) \supseteq 12(2) - \sqrt[4]{4b^3c^3}(\sqrt[4]{a} \cos(y - 1)x - 2x_0) \\ & = x_0 2020^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{a} \cos(x_0) = x_0 2020^{\frac{1}{2}} = x_0 20^{\frac{1}{2}} = 4030^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

.....9 分

设 $f(x) = \sqrt[4]{a} \cos(x)$, $x > 2$,

则 $f'(x) = -\sqrt[4]{a} \sin(x)$ 10 分

所以当 $x \in (2, 5)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x) = \sqrt[4]{a} \cos(x)$ 单调递减;

当 $x \in \sqrt[4]{a} \cos(5, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x) = \sqrt[4]{a} \cos(x)$ 单调递增11 分

所以当 $x_0 = 5$ 时, $S_{\triangle PMN}$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线