

## 天津市南开中学 2023 届高三第三次月考

### 一、选择题

1. 设  $i$  为虚数单位, 则复数  $z = \frac{2}{1+i}$  的虚部是 ( )  
A.  $-i$     B.  $-1$     C.  $i$     D.  $1$
2. 集合  $A = \{x | x^2 > 4\}$ ,  $B = \{x | -5 < x < 1\}$ , 则  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$  ( )  
A.  $\{x | -5 < x < -2\}$     B.  $\{x | -2 < x < 2\}$     C.  $\{x | -2 < x < 1\}$     D.  $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$
3. 已知直线  $l_1: (a-1)x + 2ay = 0$ ,  $l_2: (2-2a)x + (a+1)y + 1 = 0$ , 则  $a=1$  是  $l_1 // l_2$  的 ( ) 条件  
A. 充分不必要    B. 必要不充分    C. 充要    D. 既不充分也不必要
4.  $(\frac{3}{x^2})^6$  展开式中的常数项是 ( )  
A.  $-135$     B.  $135$     C.  $1215$     D.  $-1215$
5. 已知  $a = \log_2 \sqrt{3}$ ,  $b = 2^{0.4}$ ,  $c = \frac{1}{3}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是  
A.  $b < a < c$     B.  $a < c < b$     C.  $a < b < c$     D.  $b < c < a$
6. 将函数  $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$  的图象纵坐标不变, 横坐标缩小为原来的  $\frac{1}{2}$ , 再向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 得到函数  $g(x)$  的图象, 则下列说法正确的是 ( )  
A.  $g(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{24}, 0)$  对称    B.  $g(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{6}$  对称  
C.  $g(x)$  过点  $(\frac{\pi}{24}, 2)$     D.  $g(x)$  在区间  $(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{24})$  上单调递增
7. 设抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ ,  $C$  上一点  $B$ , 满足直线  $FB$  与  $y$  轴正半轴交于点  $M$ , 且  $B$  在  $F, M$  之间, 若  $|FB| = 2|BM|$ , 且点  $B$  到抛物线准线的距离为  $\frac{4}{3}$ , 则点  $M$  的纵坐标为 ( )  
A.  $1$     B.  $\sqrt{2}$     C.  $\frac{3}{2}$     D.  $\sqrt{3}$
8. 已知双曲线  $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ , 关于原点对称的两点  $A, B$  分别在双曲线的左、右两支上,  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$ ,  $3\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FC}$ , 且点  $C$  在双曲线上, 则双曲线的离心率为 ( )  
A.  $\sqrt{2}$     B.  $\frac{\sqrt{37}}{5}$     C.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$     D.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
9. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x+4}, & -4 < x < 2, \\ \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}, & 2 \leq x < 6. \end{cases}$  若方程  $f(x) + ax^2 = 0$  有 5 个不等实根, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )  
A.  $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{4}) \cup \{-\frac{1}{3}\}$     B.  $[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}]$     C.  $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}]$     D.  $(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty) \cup \{\frac{1}{3}\}$

二、填空题

10. 某校为了解学生关于校本课程的选课意向, 计划从高一、高二这两个年级共500名学生中, 采用分层抽样的方法抽取50人进行调查. 已知高一年级共有300名学生, 那么应抽取高一年级学生的人数为\_\_\_\_\_

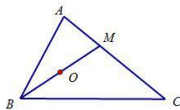
11. 一批产品分为一、二、三3个等级, 其中一级品的个数是二级品的两倍, 三级品的个数是二级品的一半, 从这批产品中随机抽取一个检验, 其级别为随机变量 $\xi$ , 则 $P\left(\frac{1}{3} \leq \xi \leq \frac{5}{3}\right) =$ \_\_\_\_\_

12. 等差数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_3=1$ ,  $a_5-a_6+a_7=2$ , 则数列 $\{\cos(a_n\pi)\}$ 的前2023项和为\_\_\_\_\_.

13. 已知 $a, b$ 都是正数, 则 $\frac{2a}{a+2b} + \frac{b}{2a+b}$ 的最小值是\_\_\_\_\_

14. 已知圆 $C$ 的圆心为 $C(2,1)$ , 且有一条直径的两个端点分别在两坐标轴上, 若直线 $l: 4x - 2y + \lambda = 0$ 与 $C$ 交于 $A, B$ 两点,  $\angle ACB = 120^\circ$ , 则实数 $\lambda =$ \_\_\_\_\_

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,  $B = \frac{\pi}{3}, AB = 2$ , 点 $M$ 满足 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$ ,  $O$ 为 $BM$ 中点, 点 $N$ 在线段 $BC$ 上



移动(包括端点), 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的最小值是\_\_\_\_\_

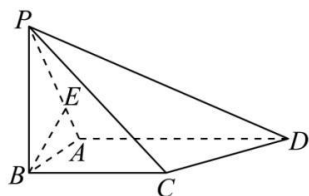
三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 记角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 已知 $\cos C + \sqrt{3} \sin C = \frac{a+c}{b}$

(1) 求角 $B$ ;

(2) 已知点 $D$ 在 $AC$ 边上, 且 $AD=4, BD=2\sqrt{7}, AB=6$ , 求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \perp BC$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AD=3$ ,  $PA=BC=2$ ,  $AB=1$ ,  $PB=\sqrt{3}$ .



- (1). 求证:  $PB \perp$  平面  $ABCD$ ;
- (2). 求平面  $PCD$  与平面  $ABCD$  夹角的余弦值;
- (3). 若点  $E$  在棱  $PA$  上, 且  $BE \parallel$  平面  $PCD$ , 求线段  $BE$  的长.

18. 已知椭圆  $C$  中心在原点，右焦点  $F(2,0)$ ，离心率为  $\frac{1}{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程；

(2) 若椭圆左右顶点分别为  $A_1$  和  $A_2$ ， $B$  为椭圆位于第二象限的一点，在  $y$  轴上存在一点  $N$ ，满足  $BF \perp NF$ ，设  $\triangle A_1A_2B$  和  $\triangle A_1FN$  的面积分别为  $S_1$  和  $S_2$ ，当  $S_1:S_2=3:2$  时，求直线  $A_1B$  的斜率.

19. 已知公差为零的等差数列 $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 为等比数列, 且满足 $a_1=b_1$ ,  $b_4=2a_4$ ,  $b_2+b_3=a_5+2$ ,  $a_2, a_4, a_8$ 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ , 若不等式 $\lambda + \frac{n+9}{2^n} \geq 4 - T_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )恒成立, 求实数 $\lambda$ 的取值范围.

20. 已知函数  $f(x) = e^x - k \sin x$ .

(1). 当  $k=1$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;

(2). 若  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内存在极值点  $\alpha$ .

①. 求实数  $k$  的取值范围;

②. 求证:  $f(x)$  在区间  $(0, \pi)$  内存在唯一的  $\beta$ , 使  $f(\beta) = 1$ , 并比较  $\beta$  与  $2\alpha$  的大小, 说明理由.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

