数学参考答案

一、二、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	C	B	B	A	D	C	D	B	AB	ABD	ACD	ACD

1. C　**【解析】**解不等式化简集合 A，求出函数的值域化简集合 B，再利用交集的定义求解作答.

解不等式 $x^2-4x-12<0$ 得：$-2<x<6$，因此 $A=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$，

因为当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-1\leqslant\sin x\leqslant1$，有 $-\mathrm{e}\leqslant\mathrm{e}\sin x\leqslant\mathrm{e}$，因此 $B=\{y\mid-\mathrm{e}\leqslant y\leqslant\mathrm{e}\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1,2\}$.

故选：C.

2. B　**【解析】**利用不等式的性质判断 A 的正误，利用正切函数的性质判断 B 的正误，利用命题的否定形式判断 C 的正误，利用对数的定义判断 D 的正误.

对 A，若 $am^2\geqslant bm^2$，$m=0$ 时 $a<b$ 也成立，故 A 错；

对 B，当 $x=\frac{3\pi}{4}$ 时，$\tan x=-1$，故 $\tan x\neq1$，若 $\tan x=1$，则 $x=\frac{(4k+1)\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 B 对；

对 C，存在量词命题的否定是 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x+\frac{1}{x}<2$，故 C 错；

对 D，若 $xy=1$，x,y 均为负数，则 $\lg x$，$\lg y$ 无意义，故 D 错.

故选：B.

3. B　**【解析】**根据斐波那契螺旋线的特点，首先求出正方形 $EFGH$ 的边长，再由弧长公式求题图中斐波那契螺旋线的长度.

不妨设正方形 $EFGH$ 的边长为 a，则 $|AB|=a+2a+5a=16$，解得 $a=2$，

所以图中斐波那契螺旋线的长度为 $\frac{\pi}{2}\times(a+a+2a+3a+5a)=6\pi a=12\pi$.

故选：B.

4. A　**【解析】**根据三角函数的定义求出 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ 与 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，再结合 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}>0$ 及 $\alpha+\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 求出 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，利用余弦差角公式求出答案.

由题意得：$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{9+16}}=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{9+16}}=\frac{4}{5}$，

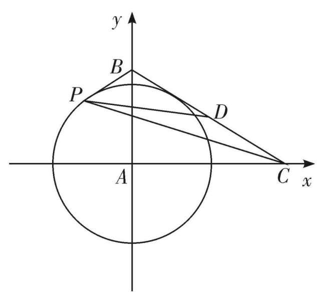
因为 $\beta\in(0,\pi)$，所以 $\alpha+\beta\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$，

因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}>0$，所以 $\alpha+\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{3+8\sqrt{2}}{15}$.

故选：A.

5. D　**【解析】**建立如图所示的坐标系，根据 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PD}|^2-5$ 可求其最大值.



以 A 为原点建系，$B(0,2)$，$C(4,0)$，

直线 BC：$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，即 $x+2y-4=0$，故圆的半径为 $r=\frac{4}{\sqrt{5}}$，

∴圆 A：$x^2+y^2=\frac{16}{5}$，设 BC 中点为 $D(2,1)$，

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2=|\overrightarrow{PD}|^2-\frac{1}{4}\times20=|\overrightarrow{PD}|^2-5$，

$|PD|_{\max}=|AD|+r=\sqrt{5}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$，$\therefore(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC})_{\max}=\frac{81}{5}-5=\frac{56}{5}$.

故选:D.

6. C 【解析】根据对数的运算法则及性质比较 b,c 与 a 的大小.

由 $a=0.75=\frac{3}{4}$，

因为 $(5^{\frac{3}{4}})^4=125<4^4=256$，故 $5^{\frac{3}{4}}<4$，所以 $a=\log_5 5^{\frac{3}{4}}<\log_5 4=b$，

因为 $x>0$ 时，$x>\sin x$，所以 $a=0.75>\frac{\pi}{5}>\sin\frac{\pi}{5}=c$，故 $c<a<b$.

故选:C.

7. D 【解析】对 $f(x)$ 求导，利用导数与函数极值的关系，分类讨论 3 是否为极值点，结合 $y=\frac{e^x}{x^2}$ 的图象性质即可求得 a 的取值范围.

因为 $f(x)=\frac{e^x}{x^3}-a\left(\frac{3}{x}+\ln x\right)(x>0)$，

所以 $f'(x)=\frac{x-3}{x^4}e^x-a\frac{x-3}{x^2}=\frac{(x-3)}{x^2}\left(\frac{e^x}{x^2}-a\right)$，

因为 $f(x)$ 只有一个极值点，所以

若 3 是极值点，因为 $\left(\frac{e^x}{x^2}\right)'=\frac{x-2}{x^3}e^x$，所以当 $0<x<2$ 时，$\left(\frac{e^x}{x^2}\right)'<0$，当 $x>2$ 时，$\left(\frac{e^x}{x^2}\right)'>0$，

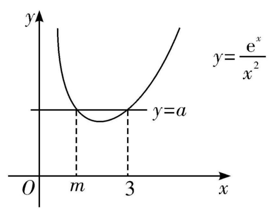
则 $y=\frac{e^x}{x^2}$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，故 $y=\frac{e^x}{x^2}\geqslant\frac{e^2}{2^2}=\frac{e^2}{4}$，

则 $a\leqslant\frac{e^x}{x^2}$，所以 $a\leqslant\left(\frac{e^x}{x^2}\right)_{\min}=\frac{e^2}{4}$；

当 x 趋向于 0 时，e^x 趋向于 1，x^2 趋向于 0，则 $\frac{e^x}{x^2}$ 趋向于正无穷，

当 x 趋向正无穷时，e^x 趋向正无穷的速率远远大于 x^2 趋向正无穷的速率，则 $\frac{e^x}{x^2}$ 趋向于正无穷，

若 3 不是极值点，如图，则 3 是 $\frac{e^x}{x^2}-a=0$ 的一个根，且存在另一个根 $0<m<2$，此时 $a=\frac{e^3}{9}$；



当 $a=\frac{e^3}{9}$ 时，$f'(x)=\frac{(x-3)}{x^2}\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{e^3}{9}\right)$，

令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<m$；令 $f'(x)>0$，解得 $x>m$.

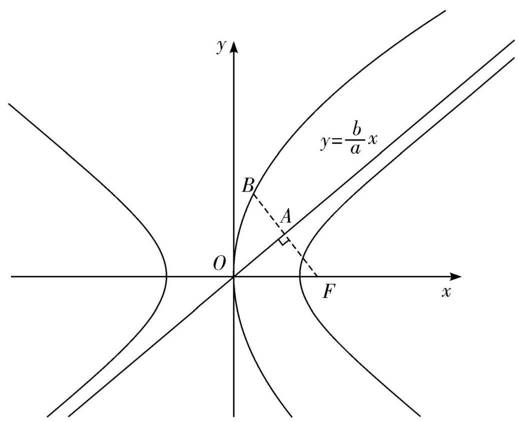
所以 $f(x)$ 在区间 $(0,m)$ 上单调递减，在区间 $(m,+\infty)$ 上单调递增，满足题意.

综上:$a\leqslant\frac{e^2}{4}$ 或 $a=\frac{e^3}{9}$，即 $a\in\left(-\infty,\frac{e^2}{4}\right]\cup\left\{\frac{e^3}{9}\right\}$.

故选:D.

8. B 【解析】根据几何关系，求得点 B 的坐标，结合 A 点在双曲线渐近线上，求得 a,b 的等量关系，整理化简即可求得双曲线离心率.

根据题意，作图如右：



因为双曲线 C_1 和抛物线 C_2 共焦点，故可得 $a^2+b^2=\frac{p^2}{4}$，

又 $F(c,0)$ 到 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离 $d=\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，

即 $|AF|=b$，$|OA|=a$，又 A 为 BF 中点，则 $|BF|=2b$，

设点 $B(x,y)$，则 $2b=x+\frac{p}{2}$，解得 $x=2b-\frac{p}{2}$；

则由等面积可知：$\frac{1}{2}\times|BF|\times|OA|=\frac{1}{2}\times|OF|\times y$，

解得 $y=\frac{4ab}{p}$，则 $B\left(2b-\frac{p}{2},\frac{4ab}{p}\right)$，

则 $x_A=b$，$y_A=\frac{2ab}{p}$，又点 A 在渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 上，即 $\frac{b^2}{a}=\frac{2ab}{p}$，

即 $2a^2=pb$,

又 $p^2=4a^2+4b^2$,联立得 $a^4-a^2b^2-b^4=0$,即$\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}+1=0$,解得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

故 $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

故选:B.

9. AB 【解析】根据频率之和为 1 可判断 A,由百分位数的计算可求解 B,根据频率分布直方图可得每个分数段的占比,即可判断 CD.

对于 A:频率分布直方图中小长方形的总面积为 1,组距为 10,故$(0.01+0.02+0.04+x+0.005)\times10=1$,解得 $x=0.025$,故 A 正确;

对于 B:设 80%分位数为 N,N 落在区间$[80,90)$中,即$(0.01+0.02+0.04)\times10+0.025\times(N-80)=0.8$,解得 $N=84$,故 B 正确;

对于 C:60 分以下的人占比为 0.1,故全市初二学生数学水平分数低于 60 分的人数约为 $36000\times0.1=3600$,故 C 错误;

对于 D:80 分及以上的人占比为$(0.025+0.005)\times10=0.3=30\%$,故 D 错误.

故选:AB.

10. ABD 【解析】求得 $P(A)$的值判断选项 A;求得 $P(B|A)$的值判断选项 B;举反例否定选项 C;利用公式 $P(A)P(B)=P(AB)$是否成立判断选项 D.

选项 A:$P(A)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_4^1C_4^1}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$. 判断正确;

选项 B:$P(AB)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^1C_4^1}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$. 判断正确;

选项 C:若第一次向下的数字为偶数,第二次向下的数字为奇数,

则两次向下的数字之和为奇数. 则事件 A 和事件 B 不是对立事件. 判断错误;

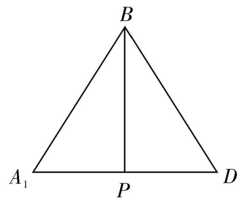
选项 D:$P(B)=\frac{C_2^1C_2^1+C_2^1C_2^1}{C_4^1C_4^1}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$,又 $P(A)=\frac{1}{2}$,$P(AB)=\frac{1}{4}$,

则有 $P(A)P(B)=P(AB)$成立,则事件 A 和事件 B 相互独立. 判断正确.

故选:ABD.

11. ACD 【解析】根据 BP 的最小值为等边三角形$\triangle BA_1D$ 的高,可求得 A 正确;将$\triangle AA_1D$ 与矩形 A_1B_1CD 沿 A_1D 翻折到一个平面内,可知所求最小值为 AC,利用余弦定理可求得 B 错误;利用体积桥 $V_{B_1-ACP}=V_{A-B_1CP}$ 可求得三棱锥 B_1-ACP 的体积为定值,知 C 正确;利用体积可求得点 B 到平面 AB_1C 的距离,根据交线为圆可求得交线长,知 D 正确.

对于 A,在$\triangle BA_1D$ 中,$A_1B=BD=A_1D=2\sqrt{2}$,即$\triangle BA_1D$ 是边长为 $2\sqrt{2}$的等边三角形,



$\therefore BP$ 的最小值为$\triangle BA_1D$ 的高,$\therefore BP_{\min}=\sqrt{8-2}=\sqrt{6}$,A 正确;

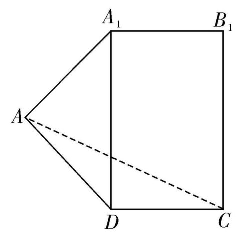
对于 B,将$\triangle AA_1D$ 与矩形 A_1B_1CD 沿 A_1D 翻折到一个平面内,如图所示,

则 $PA+PC$ 的最小值为 AC,

又 $AD=CD=2$,$\angle ADA_1=\frac{\pi}{4}$,$\angle A_1DC=\frac{\pi}{2}$,

$\therefore$在$\triangle ACD$ 中,由余弦定理得:$AC^2=4+4-8\cos\frac{3\pi}{4}=8+4\sqrt{2}$,

$\therefore AC=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$,即$(PA+PC)_{\min}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$,B 错误;

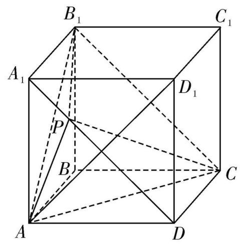


对于 C,$\because A_1B_1\perp$平面 ADD_1A_1,$AD_1\subset$平面 ADD_1A_1,$\therefore A_1B_1\perp AD_1$,

$\because$四边形 ADD_1A_1 为正方形,$\therefore AD_1\perp A_1D$,

又 $A_1B_1\cap A_1D=A_1$,A_1B_1,$A_1D\subset$平面 A_1B_1CD,$\therefore AD_1\perp$平面 A_1B_1CD;

$\therefore V_{B_1-ACP}=V_{A-B_1CP}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1CP}\cdot\frac{1}{2}AD_1=\frac{1}{6}S_{\square A_1B_1CD}\cdot\frac{1}{2}AD_1=\frac{1}{6}\times2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{4}{3}$,



即三棱锥 B_1-ACP 的体积不变,C 正确;

对于 D,设点 B 到平面 AB_1C 的距离为 d,

$\because V_{B\text{-}AB_1C}=V_{B_1\text{-}ABC}$,$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle AB_1C}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot BB_1$,

即 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}d=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2$,解得 $d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$以点 B 为球心,$\sqrt{2}$ 为半径的球面与平面 AB_1C 的交线是以 $\sqrt{2-d^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 为半径的圆,

$\therefore$交线长为 $2\pi\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$,D 正确.

故选:ACD.

12. ACD 【解析】利用已知条件和函数的性质对选项逐一判断即可得正确答案.

因为 $f(x)+f(2-x)=2$,所以令 $x=1$ 得 $f(1)+f(2-1)=2$,所以 $f(1)=1$,故 A 正确;

由当 $x\in\left[\frac{3}{2},2\right]$,$f(x)\leqslant 2(x-1)$ 恒成立,令 $x=\frac{3}{2}$,则 $f\left(\frac{3}{2}\right)\leqslant 1$,由 $f(x)$ 为区间$[0,2]$上的“非减函数”,

则 $f\left(\frac{3}{2}\right)\geqslant f(1)=1$,所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)=1$,则 $\forall x\in\left[\frac{3}{2},2\right]$,$f(x)\geqslant f\left(\frac{3}{2}\right)=1$,故 B 错误;

$\forall x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$,$f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{3}{2}\right)$,而 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)=2$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=1$,$f(x)=1$,

由 $f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)=2$,$\frac{2}{3}\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$,$\frac{25}{18}\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$,则 $f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{25}{18}\right)=1$,则 $f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{25}{18}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)=4$,故 C 正确;

当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时,$f(0)=0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,$f(x)\in[0,1]$,令 $t=f(x)\in[0,1]$,则 $f(t)\in[0,1]$,$-t+2\in[1,2]$,

则 $f(t)\leqslant -t+2$,即 $f(f(x))\leqslant -f(x)+2$,故 D 正确.

故选:ACD.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. -10 【解析】先求$\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ 展开式中 x^3 项,然后乘以 $2x$ 可得.

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r C_5^r x^{5-2r}$,

令 $5-2r=4$ 或 $5-2r=3$,得 $r=\frac{1}{2}$(舍去),$r=1$,$T_2=C_5^1 x^4\left(-\frac{1}{x}\right)=-5x^3$,

所以$(2x+1)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ 展开式中含 x^4 的项为 $2x\times(-5x^3)=-10x^4$.

故答案为:-10.

14. 4 【解析】因为圆 M:$(x+3)^2+(y-3)^2=1$,

所以 $M(-3,3)$,半径 $r=1$,

抛物线 C:$y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$,准线为直线 l:$x=-1$,

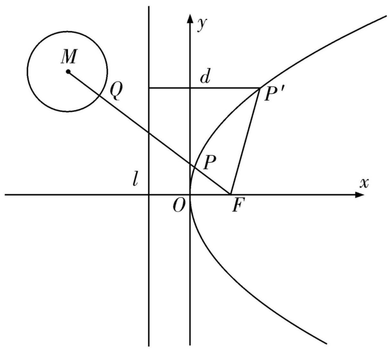
则点 P 到直线 l 的距离 $d=|PF|$,

所以点 P 到直线 l 的距离与$|PQ|$之和为$|PF|+|PQ|$,

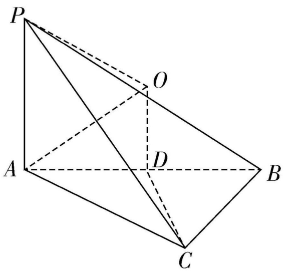
所以当 M,Q,P,F 四点共线时,$|PF|+|PQ|$取得最小值,

其最小值为$|FM|-1=\sqrt{(1+3)^2+(0-3)^2}-1=4$.

故答案为:4.



15. $\frac{9}{2}\pi$ 【解析】取 AB 中点为 D，过 D 作 $OD/\!/PA$，且 $OD=\frac{1}{2}PA=\frac{1}{2}$，



因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $OD\perp$ 平面 ABC.

由于 $AC\perp BC$，故 $DA=DB=DC$，进而可知 $OA=OB=OC=OP$，

所以 O 是球心，OA 为球的半径.

由 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\cdot CB\cdot PA=\frac{2}{3}\Rightarrow AC\cdot CB=4$，

又 $AB^2=AC^2+BC^2\geqslant 2AC\cdot BC=8$，当且仅当 $AC=BC=2$ 时，等号成立，

故此时 $AB=2\sqrt{2}$，所以球半径 $R=OA=\sqrt{OD^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}\geqslant\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{3}{2}$，

故 $R_{\min}=\frac{3}{2}$，体积最小值为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{2}\pi$.

故答案为：$\frac{9}{2}\pi$.

16. $10\times 3^{k-1}$ 【解析】由题可知经过一次变换 $A\to f(A)$，每个 1 变成 3 项，其中 2 个 0，1 个 1；每个 0 变成 3 项，其中 2 个 1，1 个 0，

设数列 A_k 中 1 的个数为 a_k，0 的个数为 b_k. 数列 A_{k+1} 中 1 的个数为 a_{k+1}，0 的个数为 b_{k+1}.

则由规律可知 $a_{k+1}=a_k+2b_k$；$b_{k+1}=2a_k+b_k$，可得 $a_{k+1}+b_{k+1}=3a_k+3b_k=3(a_k+b_k)$，

所以 $a_k+b_k=5\times 3^{k-1}$，则 $b_k=5\times 3^{k-1}-a_k$，所以 $a_{k+1}=a_k+2b_k=a_k+2(5\times 3^{k-1}-a_k)=10\times 3^{k-1}-a_k$，

于是可得 $a_k+a_{k+1}=10\times 3^{k-1}$，即 $S_k+S_{k+1}=10\times 3^{k-1}$.

故答案为：$10\times 3^{k-1}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 当 $s=3$，$t=0$ 时，$2S_n=3a_n-n$，

当 $n=1$ 时，$2S_1=3a_1-1$，则 $a_1=1$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$\begin{cases}2S_n=3a_n-n,\\ 2S_{n-1}=3a_{n-1}-(n-1),\end{cases}$

两式相减得 $2a_n=3a_n-3a_{n-1}-1$，即 $a_n=3a_{n-1}+1$，…… 2 分

所以 $a_n+\frac{1}{2}=3\left(a_{n-1}+\frac{1}{2}\right)$，

因为 $a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

所以 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\frac{3}{2}$，公比为 3 的等比数列，

所以 $a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times 3^{n-1}$，所以 $a_n=\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}$. …… 5 分

(2) 当 $s=0$，$t=3$ 时，$2S_n=3n^2-n$，即 $S_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3n-2>1$，…… 6 分

由 $a_{n+1}+\frac{\lambda}{a_n}\geqslant\lambda$，得 $a_{n+1}a_n+\lambda\geqslant\lambda a_n$，即 $\lambda\leqslant\frac{a_na_{n+1}}{a_n-1}$ 对于任意 $n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，

$\frac{a_na_{n+1}}{a_n-1}=\frac{(3n-2)(3n+1)}{3n-3}$，令 $t=3n-3\geqslant 3$，

则 $\frac{a_na_{n+1}}{a_n-1}=\frac{(t+1)(t+4)}{t}=t+\frac{4}{t}+5$，…… 8 分

因为 $y=t+\frac{4}{t}$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $t=3$ 时，$\left(t+\frac{4}{t}+5\right)_{\min}=\frac{28}{3}$，所以 $\lambda\leqslant\frac{28}{3}$. …………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)依题意有 $\sqrt{3}a\sin B=2b\cos^2\frac{B+C}{2}=(1-\cos A)b$，

所以 $\sqrt{3}\sin A\sin B=(1-\cos A)\sin B$，…………………………………………… 3 分

因为在 $\triangle ABC$ 中 $\sin B\neq 0$，

所以 $\sqrt{3}\sin A=1-\cos A$，

又 $\sin^2A+\cos^2A=1$，

解得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos A=-\frac{1}{2}$，

所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. …………………………………………… 6 分

(2)由 $|\overrightarrow{AD}|=\left|\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right|=1$，

得 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2$，…………………………………………… 8 分

所以 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\frac{2\pi}{3}=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=4\geqslant|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|$，

所以 $(|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|)_{\max}=4$，当且仅当 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=2$ 时，等号成立. …………………… 10 分

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\angle BAC=\sqrt{3}$. …………………… 12 分

19.【解析】(1)$\because PC\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PC\perp AC$. …………………………………………… 2 分

$\because AB=2$，$AD=CD=1$，$AD\perp DC$，且四边形 $ABCD$ 是直角梯形，

$\therefore AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{AD^2+(AB-DC)^2}=\sqrt{2}$，

即 $AC^2+BC^2=AB^2$，

$\therefore AC\perp BC$.

$\because PC\cap BC=C$，$PC\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，

$\therefore AC\perp$ 平面 PBC. …………………………………………… 5 分

$\because AC\subset$ 平面 EAC，

$\therefore$ 平面 $EAC\perp$ 平面 PBC. …………………………………………… 6 分

(2)$\because PC\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PC\perp BC$.

由(1)知 $AC\perp BC$.

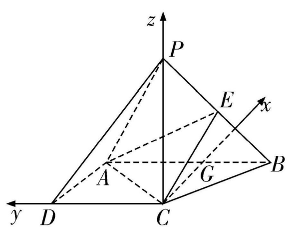
$\because PC\cap AC=C$，$PC\subset$ 平面 PAC，$AC\subset$ 平面 PAC，

$\therefore BC\perp$ 平面 PAC，

$\therefore\angle BPC$ 即为直线 PB 与平面 PAC 所成角.

$\therefore\sin\angle BPC=\frac{BC}{PB}=\frac{\sqrt{2}}{PB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore PB=\sqrt{6}$，则 $PC=2$，



取 AB 的中点 G，连接 CG，以点 C 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{CG}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CP}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$A(1,1,0)$，$B(1,-1,0)$，$E\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，

$\therefore\overrightarrow{CA}=(1,1,0),\overrightarrow{CP}=(0,0,2),\overrightarrow{CE}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$, ······························ 8 分

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$为平面 PAC 的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=x_1+y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=2z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$,得 $z_1=0,y_1=-1$,得 $\boldsymbol{m}=(1,-1,0)$;

设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$为平面 ACE 的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=x_2+y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}y_2+z_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$,则 $y_2=-1,z_2=-1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$. ······························ 10 分

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{1\times1+(-1)\times(-1)+0\times(-1)}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. ······························ 12 分

由图知所求二面角为锐角,所以二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

20.【解析】(1)零假设 H_0:数学成绩与语文成绩无关,

据表中数据计算得:$\chi^2=\frac{200\times(50\times80-30\times40)^2}{90\times110\times120\times80}\approx16.498>6.635$,

根据小概率值 $\alpha=0.010$ 的 χ^2 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,从而认为数学成绩与语文成绩有关. ······························ 4 分

(2)$\because L(B|A)=\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}=\frac{\frac{P(AB)}{P(A)}}{\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}}=\frac{P(AB)}{P(A\bar{B})}=\frac{n(AB)}{n(A\bar{B})}=\frac{80}{30}=\frac{8}{3}$,

$\therefore$估计 $L(B|A)$的值为$\frac{8}{3}$. ······························ 8 分

(3)按分层抽样,语文成绩优秀的 5 人,语文成绩不优秀的 3 人,随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56},P(X=1)=\frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}$,

$P(X=2)=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28},P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$,

$\therefore X$ 的概率分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

$\therefore$数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{56}+1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{28}=\frac{105}{56}=\frac{15}{8}$. ······························ 12 分

21.【解析】(1)由椭圆的性质可知,左焦点 F_1 发出的光线,

经过两次反射之后回到点 F_1,光线经过的路程为 $4a=8$,解得 $a=2$.

又椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $c=\sqrt{3}$,

故 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$,

故椭圆 T 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ······························ 4 分

(2)由题意得 $F_2(\sqrt{3},0)$,设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

因为$\angle DF_2M$ 与$\angle DF_2N$ 互补,

所以 $k_{MF_2}+k_{NF_2}=0$，即 $\frac{y_1}{x_1-\sqrt{3}}+\frac{y_2}{x_2-\sqrt{3}}=0$，

化简整理，可得 $x_1y_2-\sqrt{3}y_2+x_2y_1-\sqrt{3}y_1=0$，

设直线 MN 的方程为 $x=my+n(m\neq0)$，

得 $2my_1y_2+(n-\sqrt{3})(y_1+y_2)=0$.

联立直线 MN 与椭圆的方程得 $\begin{cases}x=my+n,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

整理得 $(m^2+4)y^2+2mny+n^2-4=0$，

$\Delta=4m^2n^2-4(m^2+4)(n^2-4)>0$，可得 $n^2<m^2+4$，

则 $y_1+y_2=-\frac{2mn}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{n^2-4}{m^2+4}$，

所以 $\frac{2m(n^2-4)}{m^2+4}+(n-\sqrt{3})\cdot\frac{-2mn}{m^2+4}=0$，

解得 $n=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

故直线 MN 的方程为 $x=my+\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………… 8 分

点 $F_2(\sqrt{3},0)$ 到直线 MN 的距离 $d=\frac{\left|\sqrt{3}-0-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1+m^2}}$，

$|MN|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{2mn}{m^2+4}\right)^2-4\times\frac{n^2-4}{m^2+4}}=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{4\sqrt{m^2+4-n^2}}{m^2+4}$

$=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{4\sqrt{3m^2-4}}{\sqrt{3}(m^2+4)}$，

所以 $S_{\triangle F_2MN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{4\sqrt{3m^2-4}}{\sqrt{3}(m^2+4)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1+m^2}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3m^2-4}}{m^2+4}$， ………………… 10 分

由 $n^2<m^2+4$，$n=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 可得，$\frac{16}{3}<m^2+4$，即 $3m^2-4>0$.

记 $t=\sqrt{3m^2-4}$，则 $t>0$，$m^2=\frac{t^2+4}{3}$，

所以 $S_{\triangle F_2MN}=\frac{2}{3}\times\frac{t}{\frac{t^2+4}{3}+4}=2\times\frac{1}{t+\frac{16}{t}}\leqslant2\times\frac{1}{2\sqrt{t\times\frac{16}{t}}}=\frac{1}{4}$，

当且仅当 $t=\frac{16}{t}$，即 $t=4$，$m^2=\frac{20}{3}$ 时，等号成立.

故 $\triangle MNF_2$ 面积的最大值为 $\frac{1}{4}$. ……………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) 由 $f(x)\geqslant0,x>0\Rightarrow e^x-\frac{1}{6}ax^3\geqslant0\Rightarrow a\leqslant\left(\frac{6e^x}{x^3}\right)_{\min}$，

令 $h(x)=\frac{6e^x}{x^3}$，$h'(x)=6\cdot\frac{e^x\cdot x^3-3x^2\cdot e^x}{x^6}=6\cdot\frac{e^x(x-3)}{x^4}$，

当 $x\in(0,3)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$ 在区间 $(0,3)$ 上单调递减，在区间 $(3,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(3)=\frac{6e^3}{27}=\frac{2e^3}{9}$，

$\therefore a\leqslant\frac{2e^3}{9}$，

即 a 的最大值为$\frac{2e^3}{9}$. ………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)$\because f(x)=e^x-\frac{1}{6}x^3$，

$\therefore f_1(x)=f'(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2, f_2(x)=f_1'(x)=e^x-x, f_3(x)=f_2'(x)=e^x-1, f_4(x)=e^x$，

当 $n\geqslant4$ 时，$f_n(x)=e^x$，

当 $n\geqslant3$ 时，$g_n(x)=\sum\limits_{i=2}^{n}f_i(x)=e^x-x+e^x-1+(n-3)e^x=(n-1)e^x-x-1$，…………………… 8 分

$g_n'(x)=(n-1)e^x-1$，令 $g_n'(x)=0\Rightarrow x=\ln\frac{1}{n-1}$，

当 $x<\ln\frac{1}{n-1}$时，$g_n'(x)<0$，$g_n(x)$单调递减，

当 $x>\ln\frac{1}{n-1}$时，$g_n'(x)>0$，$g_n(x)$单调递增，

$\therefore x=t_n=\ln\frac{1}{n-1}$时，$y=g_n(x)$取得最小值，

且 $g_n(t_n)=(n-1)\cdot\frac{1}{n-1}-\ln\frac{1}{n-1}-1=\ln(n-1)\geqslant\ln 2>0$，

$\therefore$点$(t_n, g_n(t_n))$为$\left(\ln\frac{1}{n-1},\ln(n-1)\right)$在定直线 $y=-x$ 上. ……………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。