

2015年清华大学自主招生试题

2015年清华大学自主招生试题（回忆版）

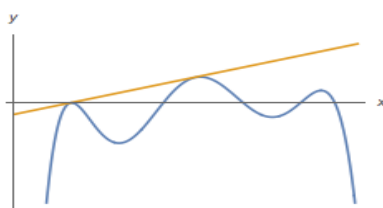
发表于2015年7月21日由意琦行

注 所有选择题均为不定项选择题。

1、已知非负实数 x, y, z 满足 $4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2z = 3$ ，求 $5x + 4y + 3z$ 的最大值。

2、已知 $x^2 + y^2 \leq 1$ ，求 $|x^2 + 2xy - y^2|$ 的最大值。

3、如图所示，已知函数 $f(x)$ 与直线 $y = kx + m$ 有两个切点，则 $g(x) = kx - f(x)$ 有（ ）



A. 3 个极大值点

B. 2 个极小值点

C. 2 个极大值点

D. 4 个极小值点

4、已知 $x, y, z \in \mathcal{Z}$ ，且 $xy + yz + zx = 1$ ，则 $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ 的值可能是（ ）

A. 16900

B. 17900

C. 18900

D. 以上都不对

5、一个以 O 为圆心的圆上的整数格点（横纵坐标都是整数）的点的个数可能是（ ）

A. 4

B. 6

C. 8

D. 12

6、已知 $2x + y = 1$ ，求 $x + \sqrt{x^2 + y^2}$ 的最值。

7、50 个黑球和 49 个白球排成一排，则（ ）

A. 必有一个黑球右侧白球的数量等于黑球的数量

B. 必有一个白球右侧白球的数量等于黑球的数量

C. 必有一个黑球右侧黑球的数量比白球的数量多 1

D. 必有一个白球右侧黑球的数量比白球的数量多 1

8、已知 $P = \{(x, y) | x^2 + y^2 = r^2\}$, $Q = \{(x, y) | (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$, 已知 $P \cup Q = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$, 则 ()

A. $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$

B. $2ax_1 + 2by_1 = a^2 + b^2$

C. $0 < a^2 + b^2 < 2r^2$

D. $x_1 + x_2 = a, y_1 + y_2 = b$

9、一个正十五边形, 任取其三个顶点构成三角形, 可构成多少个钝角三角形?

? 10、已知 $\vec{a} = (m \cos \theta_1, m \sin \theta_1)$, $\vec{b} = (m \cos \theta_2, m \sin \theta_2)$, 定义 $\vec{a}^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{m} \cos \frac{\theta_1}{2}, \sqrt{m} \sin \frac{\theta_1}{2}\right)$, $\vec{b}^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{m} \cos \frac{\theta_2}{2}, \sqrt{m} \sin \frac{\theta_2}{2}\right)$, 则 ()

A. $\left| \vec{a}^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{b}^{\frac{1}{2}} \right|$

B. $\left| \vec{a}^{\frac{1}{2}} + \vec{b}^{\frac{1}{2}} \right| \geq 4\sqrt{mn} \cos^2 \frac{\theta}{2}$

C. $\left| \vec{a}^{\frac{1}{2}} - \vec{b}^{\frac{1}{2}} \right| \geq 4\sqrt{mn} \sin^2 \frac{\theta}{2}$

D.

? 11、一个抛物线 $y^2 = 2px$ 上有两个点 A 、 B , 则 ()

A. AB 过抛物线焦点

B. $OA \cdot OB \leq ?$

C. $OA^2 + OB^2 \leq ?$

D. O 到 AB 的距离小于 1

? 12、点集 $A = \left\{ (x, y) \mid \frac{\sin \pi x}{x^2 - x + 1} = y \right\}$, 则 ()

A. 曲线有对称轴

B. $A \subseteq \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$

C. 曲线有对称中心

D. $A \subseteq ?$

? 13、已知 $f(x) + f(y) = f\left(\frac{xy}{1+xy}\right)$, $x, y \in \mathcal{R}$, 则 $f(x)$ ()

A. 为奇函数

B. 为偶函数

C. 有对称轴

D. 中心对称

参考答案

1、 $\sqrt{77} - 3$ 提示 柯西不等式.

2、 $\sqrt{2}$ 提示 三角换元.

3、C.

4、A. 提示 $1 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = (x + y)(x + z)$.

5、ACD. 提示 $r = 1, \sqrt{5}, 5$.

6、最小值为 $\frac{4}{5}$, 无最大值. 提示 三角换元.

7、A.

8、ABCD.

9、315. 提示 正 $2k + 1$ 边形对应的钝角三角形个数为 $\frac{1}{2}k(k - 1)(2k + 1)$.