

姓名 _____ 准考证号 _____

(在此卷上答题无效)

绝密★启用前

三湘名校教育联盟·2023届高三第一次大联考

数 学

本试卷共 4 页。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 1, 2, 4\}$, $B = \{x | (x-1)^2 \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-1, 4\}$ D. $\{1, 4\}$
2. 已知复数 $z = \frac{1+i}{i}$, 则
A. z 的虚部为 1 B. $|z| = 2$
C. z^2 为纯虚数 D. \bar{z} 在复平面内对应的点位于第二象限
3. 已知函数 $f(x) = 4^{x-\frac{1}{2}}$, 则 $f(\log_2 3) =$
A. $\frac{5}{2}$ B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D. 8
4. “数列 $\{a_n\}$ 为等比数列”是“数列 $\{\lg|a_n|\}$ 为等差数列”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 设 $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, 若 $a_5 = a_6$, 则 $n =$
A. 6 B. 7 C. 8 D. 9
6. 沙漏是我国古代的一种计时工具,是用两个完全相同的圆锥顶对顶叠放在一起组成的(如图).在一个圆锥中装满沙子,放在上方,沙子就从顶点处漏到另一个圆锥中,假定沙子漏下来的速度是恒定的(沙堆的底面是水平的).已知一个沙漏中沙子全部从一个圆锥中漏到另一个圆锥中需用时 27 分钟,则经过 19 分钟后,沙漏上方圆锥中的沙子的高度与下方圆锥中的沙子的高度之比是.
A. 1 : 1 B. 2 : 1
C. 2 : 3 D. 3 : 2

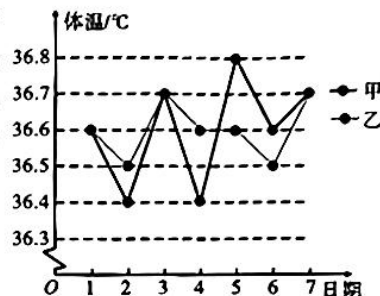


【高三数学试题·第 1 页(共 4 页)】

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, A 为双曲线 C 的左顶点, 以 $F_1 F_2$ 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于 P, Q 两点, 且 $\angle PAQ = \frac{3\pi}{4}$, 则双曲线 C 的离心率为
- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$
8. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) + f(x-2) = 0$, 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $f(x) = (1+x)e^x$, 则
- A. $f(2022) < f(\log_2 \frac{3}{10}) < f(e^{0.3})$ B. $f(2022) < f(e^{0.3}) < f(\log_2 \frac{3}{10})$
- C. $f(e^{0.3}) < f(\log_2 \frac{3}{10}) < f(2022)$ D. $f(\log_2 \frac{3}{10}) < f(e^{0.3}) < f(2022)$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 最近几个月, 新冠肺炎疫情又出现反复, 各学校均加强了疫情防控要求, 学生在进校时必须走测温通道, 每天早中晚都要进行体温检测并将结果上报主管部门, 某班级体温检测员对一周内甲、乙两名同学的体温进行了统计, 其结果如图所示, 则下列结论中正确的是



- A. 甲同学体温的极差为 0.4°C
- B. 甲同学体温的第 75 百分位数为 36.6°C
- C. 乙同学体温的众数、中位数、平均数相等
- D. 乙同学的体温比甲同学的体温稳定
10. 若 $a > 0, b > 0, a + b = 2$, 则下列不等式对一切满足条件的 a, b 恒成立的是
- A. $ab \leq 1$ B. $a^2 + b^2 \geq 2$
- C. $a^3 + b^3 \geq 2$ D. $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+2} \leq \sqrt{2} + \sqrt{3}$
11. 已知正三棱柱 $ABC-A_1 B_1 C_1$ 的所有棱长均为 2, P 为棱 CC_1 上的动点, 则下列结论中正确的是
- A. 该正三棱柱内可放入的最大球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$
- B. 该正三棱柱外接球的表面积为 $\frac{28\pi}{3}$
- C. 存在点 P , 使得 $BP \perp AB_1$
- D. 点 P 到直线 $A_1 B$ 的距离的最小值为 $\sqrt{3}$
12. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, M, N 是椭圆 C 上的两点, 且 $\overrightarrow{F_1 F_2} = \frac{1}{3} \overrightarrow{F_1 M} + \frac{2}{3} \overrightarrow{F_1 N}, |F_1 M| : |MN| = 4 : 3$, 则下列结论中正确的是
- A. M, F_2, N 三点共线 B. $\frac{|F_1 M|}{|F_2 M|} = 2$
- C. $\triangle MF_1 N$ 为直角三角形 D. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{2}{3}$

【高三数学试题·第 2 页(共 4 页)】

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 曲线 $y=x\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2-x$ 相切,则 $a=$ _____.
14. 将函数 $y=\cos x-\sin x$ 的图象先向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位,再将所得的图象上每个点的横坐标变为原来的 a 倍,得到函数 $y=\cos 2x+\sin 2x$ 的图象,则 φ 的一个可能取值为_____.
15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\leq a \\ |2^x-2|, & x>a \end{cases}$ 有 3 个零点,则 a 的取值范围是_____.
16. 已知圆 O 的半径为 2, A 为圆内一点, $OA=1$, B, C 为圆 O 上任意两点,则 $\vec{AC}\cdot\vec{BC}$ 的取值范围是_____.

四、解答题:本题共 6 题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=2, S_{n+1}=3S_n+2$.

- (1) 证明 $\{S_n+1\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (12 分)

2020 年 1 月 15 日教育部制定出台了《关于在部分高校开展基础学科招生改革试点工作的意见》(也称“强基计划”),《意见》宣布:2020 年起不再组织开展高校自主招生工作,改为实行强基计划.强基计划主要选拔培养有志于服务国家重大战略需求且综合素质优秀或基础学科拔尖的学生,据悉强基计划的校考由试点高校自主命题,校考过程中通过笔试后才能进入面试环节.已知甲、乙两所大学的笔试环节都设有三门考试科目且每门科目是否通过相互独立.若某考生报考甲大学,每门科目通过的概率均为 $\frac{1}{2}$,该考生报考乙大学,每门科目通过的概率依次为 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, m$, 其中 $0<m<1$.

- (1) 若 $m=\frac{1}{2}$, 求该考生报考乙大学在笔试环节恰好通过两门科目的概率;
(2) “强基计划”规定每名考生只能报考一所试点高校,若以笔试过程中通过科目数的数学期望为决策依据,则当该考生更希望通过乙大学的笔试时,求 m 的取值范围.

19. (12 分)

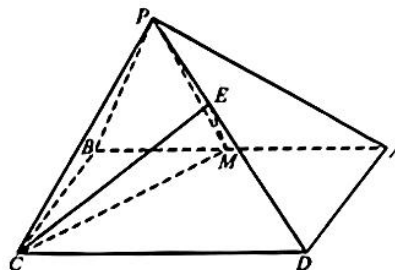
已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, S 为 $\triangle ABC$ 的面积, $\sin(A+C)=\frac{2S}{b^2-a^2}$.

- (1) 证明: $B=2A$;
(2) 若 $a=3, \cos A=\frac{2}{3}$, 求 c .

20. (12分)

如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2AD$, M 为边 AB 的中点. 以 CM 为折痕把 $\triangle BCM$ 折起,使点 B 到达点 P 的位置,且 $\angle PMB = \frac{\pi}{3}$, 连接 PA, PB, PD .

- (1) 证明: 平面 $PMC \perp$ 平面 $AMCD$;
 (2) 若 E 是线段 DP 上的动点(不与点 P, D 重合), 二面角 $E-CM-P$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 试确定点 E 的位置.



21. (12分)

在直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, P 为直线 $y = x - 1$ 上的动点, 过点 P 作抛物线 C 的两条切线, 切点分别为 A, B . 当 P 在 y 轴上时, $OA \perp OB$.

- (1) 求抛物线 C 的方程;
 (2) 求点 O 到直线 AB 距离的最大值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax - \cos x$.

- (1) 若 $a = 2$, 求函数 $f(x)$ 的零点个数;
 (2) 若函数 $g(x) = f(x) + \ln(x+1)$, 是否存在 a , 使得 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值? 说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

