高三数学参考答案、提示及评分细则

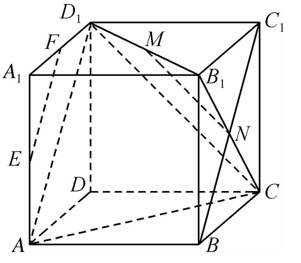
1. A　由题意得 $z=\frac{1}{1+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}-z=\mathrm{i}$. 故选 A.

2. D　由题意得 $U=\{x\mid -2<x<6\}$，又 $\complement_U M=\{x\mid -1<x<2\}$，所以 $M=\{x\mid -2<x\leqslant -1$，或 $2\leqslant x<6\}$，所以 $2\in M$，$6\notin M$，M 不是 $\{x\mid 2\leqslant x<6\}$ 的子集，$\{x\mid -2<x\leqslant -1\}\subseteq M$，所以 ABC 错误，D 正确. 故选 D.

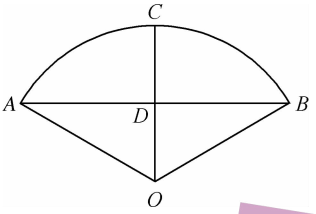
3. B　由题意得，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4+m,-4)$，由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，得 $2(4+m)-3\times4=0$，解得 $m=2$. 故选 B.

4. C　因为 $X\sim N(100,\sigma^2)$，所以 $p(X\geqslant120)=p(X\leqslant80)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{8}$，故此次考试中数学成绩不低于 120 分的学生人数约为 $1\ 000\times\frac{1}{8}=125$. 故选 C.

5. C　如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 B_1C，D_1C，AD_1，AC，易证 $MN/\!/CD_1$，$EF/\!/AD_1$，所以 $\angle AD_1C$ 为异面直线 EF 与 MN 所成的角或其补角. 易证 $AD_1=CD_1=AC$，即 $\triangle ACD_1$ 为等边三角形，所以 $\angle AD_1C=60^\circ$. 故选 C.



6. D　设该扇形的圆心角为 α，由扇形面积公式得 $\frac{1}{2}\times4^2\times\alpha=\frac{16\pi}{3}$，所以 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，取 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 C，连接 OC，交 AB 于点 D，则 $OC\perp AB$，则 $OD=OA\cos\angle AOD=4\cos\frac{\pi}{3}=2$，$AB=2AD=2\times4\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，$CD=OC-OD=2$，所以扇形的弧长的近似值为 $l_{\overset{\frown}{AB}}=$ 弦 $+\frac{2\times\text{矢}^2}{\text{径}}=AB+\frac{2CD^2}{2OA}=4\sqrt{3}+\frac{2\times4}{8}=4\sqrt{3}+1$. 故选 D.



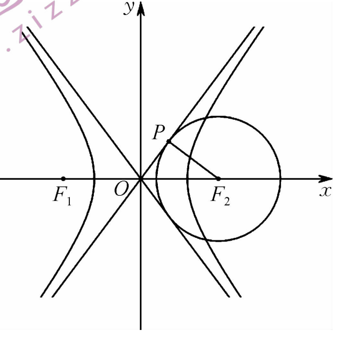
7. A　由题意，得 $a_n\neq0$，又 $a_n=-2a_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{2}$，所以 $\{a_n\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列. 因为 $a_3+a_5=-20$，所以 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2a_1+\left(-\frac{1}{2}\right)^4a_1=-20$，解得 $a_1=-64$，所以 $a_n=-64\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则 $a_5=-4$，$a_6=2$，$a_7=-1$，当 $n>7$ 时，$|a_n|<1$，因为 $T_6<T_5<0<T_7$，所以 T_6 最小. 故选 A.

8. B　由题意知 $f(x)=f(2-x)$，且 $f(2-x)+f(2+x)=0$，所以 $f(x)=-f(2+x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数. 由 $f(2)=0$ 知，$f(2\ 022)=f(2)=0$，所以 $g(2\ 022)=2\ 021f(2\ 022)=0$；由 $g(5)=4$，得 $4f(5)=4f(1)=4$，所以 $f(1)=1$，则 $f(3)=-f(1)=-1$，所以 $g(2\ 023)=2\ 022f(2\ 023)=2\ 022f(3)=-2\ 022$，则 $g(2\ 022)+g(2\ 023)=-2\ 022$. 故选 B.

9. BCD　因为 $a<b<0$，所以 $-a>-b>0$，所以 $(-a)^2>(-b)^2$，即 $a^2>b^2$，故 A 错误；因为 $a<b<0$，所以 $ab>b^2$，故 B 正确；由 $a<b<0$，得 $\frac{a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$，所以 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b$ 时等号成立，因为 $a<b<0$，所以等号不成立，故 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$，故 C 正确；因为 $a<b<0$，所以 $ab>0$，所以 $\frac{1}{ab}\times a<\frac{1}{ab}\times b<0$，所以 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，所以 $1+\frac{1}{a}>1+\frac{1}{b}$，即 $\frac{a+1}{a}>\frac{b+1}{b}$，故 D 正确. 故选 BCD.

10. ACD　$f(x)=\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，其最小正周期为 2π，因为 $4\pi=2\times 2\pi$，所以 4π 为 $f(x)$ 的一个周期，故 A 正确；令 $-\pi+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$，得 $-\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，故 B 错误；因为 $f\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=-1$，所以直线 $x=-\frac{7\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的图象的一条对称轴，故 C 正确；将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，得 $y=\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$，故其图象关于原点对称，故 D 正确. 故选 ACD.

11. ACD　设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 $l:bx-ay=0$，则 $F_2(c,0)$ 到直线 $l:bx-ay=0$ 的距离为 $\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+a^2}}=b$，因为以 F_2 为圆心的圆与 l 相切于点 P，所以 $|PF_2|=b=4$，因为 $e=\frac{5}{3}$，即 $\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$，则 $c=\frac{5}{3}a$，又 $a^2+b^2=c^2$，所以 $a=3,c=5$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_2O$ 中，$\cos\angle PF_2F_1=\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$，在 $\triangle PF_2F_1$ 中，$|PF_1|^2=|F_1F_2|^2+|PF_2|^2-2|F_1F_2|\cdot|PF_2|\cos\angle PF_2F_1=100+16-2\times10\times4\times\frac{4}{5}=52$，所以 $|PF_1|=2\sqrt{13}$，故 A 正确；当直线 l 的斜率为 0 时，A,B 两点分别为双曲线的顶点，则 $|AB|=2a=6$，又 $6<\frac{32}{3}$，故 B 错误；因为 $|AF_2|=7$，又 $a+c=8$，所以 A 在 C 的右支上，所以 $|AF_1|-|AF_2|=2a=6$，所以 $|AF_1|=13$，故 C 正确；过 F_1 分别作两渐近线的平行线 l_1,l_2 $\left(\text{其中 } l_1,l_2 \text{ 的斜率分别为}\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$，将 l_1 绕焦点 F_1 沿逆时针方向旋转到与 l_2 重合的过程中，直线与双曲线的左支有两个交点，此时直线 l 的斜率 $k>\frac{4}{3}$，或 $k<-\frac{4}{3}$，故 D 正确. 故选 ACD.



12. BCD　由题意得，将截角四面体还原为正四面体，如图 1 所示，因为 $KL/\!/BD$，平面 $ABC/\!/$平面 $EFGIJK$，所以 KL 与平面 ABC 所成的角即为原正三棱锥的侧棱与底面所成的角，设为 θ，易求 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\theta\neq60°$，故 A 错误；连接 AE，AF，则 $AE/\!/BD$，所以 $AE=4$，由正四面体中对棱互相垂直，可得 $JI\perp BD$，所以 $EF\perp AE$，在直角 $\triangle AEF$ 中，$AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$，所以 B 正确；由题意知，截角四面体由 4 个边长为 2 的正三角形，4 个边长为 2 的正六边形构成，所以其表面积为 $S=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4+4\times6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4=28\sqrt{3}$，故 C 正确；如图 2 所示，取上下底面的中心分别为 O_1,O_2，外接球的球心为 O，连接 OC,OG,CO_1,GO_2，因为截角四面体上、下底面的距离为 $2\sqrt{6}-\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，设外接球的半径为 R，则 $\sqrt{R^2-O_1C^2}+\sqrt{R^2-O_2G^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，即 $\sqrt{R^2-\frac{4}{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}-\sqrt{R^2-4}$，解得 $R^2=\frac{11}{2}$，所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=22\pi$，所以 D 正确. 故选 BCD.

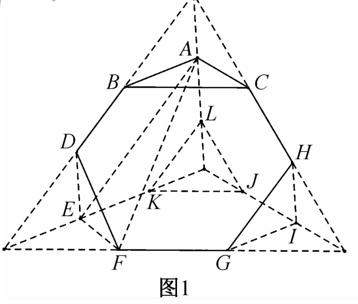


图1

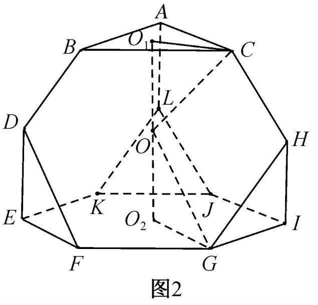


图2

13. $\sqrt{2}$　$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^r=a^r C_6^r x^{6-\frac{3}{2}r}$，令 $6-\frac{3}{2}r=0$，得 $r=4$，所以 $T_5=a^4C_6^4=15a^4=60$，又 $a>0$，所以 $a=\sqrt{2}$.

14. 6　由题意知 $F(1,0)$，设 A,B,C 的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3，由 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，得 $1-x_1=\frac{1}{3}(x_2-x_1+x_3-x_1)$，所以 $x_1+x_2+x_3=3$，由抛物线的定义得 $|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{BF}|+|\overrightarrow{CF}|=x_1+1+x_2+1+x_3+1=x_1+x_2+x_3+3=6$.

15. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　由题意可知，甲以 3∶1 获胜的概率为 $p_1=C_3^2p^2(1-p)p=3p^3(1-p)$，甲以 3∶2 获胜的概率为 $p_2=C_4^2p^2(1-p)^2p=6p^3(1-p)^2$，因为 $p_1\leqslant p_2$，所以 $p_1-p_2=3p^3(1-p)[1-2(1-p)]\leqslant 0$，解得 $p\leqslant\frac{1}{2}$，故 p 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

16. $(1,e^{\frac{3}{e}})$　$f'(x)=4(a^x-x^3)\ln a$，由题意知，方程 $a^x=x^3$ 有两个不同的正实数解 x_1,x_2，所以 $a>1$，对 $a^x=x^3$ 两边取对数，得 $x\ln a=3\ln x$，令 $g(x)=x\ln a-3\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=\ln a-\frac{3}{x}=\frac{\ln a\left(x-\frac{3}{\ln a}\right)}{x}$. 当 $x=\frac{3}{\ln a}$ 时，$g'(x)=0$；当 $x>\frac{3}{\ln a}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x<\frac{3}{\ln a}$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{3}{\ln a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3}{\ln a},+\infty\right)$ 上单调递增，于是 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{3}{\ln a}\right)=3-3\ln\left(\frac{3}{\ln a}\right)$. 当 $x\to0$ 时，$g(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$. 要使 $g(x)$ 有两个零点，必须使 $3-3\ln\left(\frac{3}{\ln a}\right)<0$，即 $\ln\left(\frac{3}{\ln a}\right)>1=\ln e$，所以 $\frac{3}{\ln a}>e$，解得 $a<e^{\frac{3}{e}}$，故 $1<a<e^{\frac{3}{e}}$. 当 $a\in(1,e^{\frac{3}{e}})$ 时，由上面的讨论，可得 $g(x)=x\ln a-3\ln x(x>0)$ 有两个零点，设为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$. 当 $0<x<x_1$ 时，$g(x)=x\ln a-3\ln x>0$，所以 $a^x>x^3$，$f'(x)=4\ln a(a^x-x^3)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x_1<x<x_2$ 时，$g(x)=x\ln a-3\ln x<0$，所以 $a^x<x^3$，$f'(x)=4(a^x-x^3)\ln a<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>x_2$ 时，$g(x)=x\ln a-3\ln x>0$，所以 $a^x>x^3$，$f'(x)=4(a^x-x^3)\ln a>0$，$f(x)$ 单调递增. 所以 x_1,x_2 就是 $f(x)$ 的两个极值点. 综上，实数 a 的取值范围是 $(1,e^{\frac{3}{e}})$.

17. 解：(1)因为 $\bar{y}=31.2$，所以 $\frac{15.6+m+n+s+37.7+39.6+44.5}{7}=31.2$，

所以 $m+n+s=81$，………………………………………………………… 2分

又 m,n,s 成递增的等差数列，所以 $m+s=2n$ 且 $m<n<s$，

所以 $n=27$，且 $m<27<s$，………………………………………………………… 3分

所以月销售量不高于 27 万辆的有 15.6，m，n，共 3 个，又基本事件总数为 7，

故所求概率 $P=\frac{3}{7}$. ………………………………………………………… 5分

(2)由表中数据可知，$\bar{x}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}x_i=4$，$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=28$. ………………………… 6分

由 $r=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}}=0.99$ 和 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}$，

得 $\frac{\hat{b}}{r}=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}}=\frac{\sqrt{670.48}}{\sqrt{28}}\approx\frac{25.89}{2\times2.65}\approx4.88$，

所以 $\hat{b}\approx4.88r=4.88\times0.99\approx4.8$，………………………………………… 8分

由 $\bar{x}=4$，$\bar{y}=31.2$，得 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=31.2-4.8\times4=12.0$，

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=4.8x+12.0$. ………………………………………… 9 分

当 $x=8$ 时，$\hat{y}=4.8\times 8+12=50.4$，

所以预测今年 8 月份的销售量大约为 50.4 万辆. ………………………………………… 10 分

18. 解：由 $3\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C$ 及正弦定理，得 $3b^2=a^2+c^2$. ………………………………………… 1 分

(1)由 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{3}b^2$，得 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{3}b^2$，………………………………………… 2 分

因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $ac=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cos B}=\frac{b^2}{\cos B}$，………………………………………… 4 分

所以 $\frac{1}{2}\times\frac{b^2}{\cos B}\cdot\sin B=\frac{1}{3}b^2$，所以 $\tan B=\frac{2}{3}$. ………………………………………… 6 分

(2)由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

又 $3b^2=a^2+c^2$，$b=2$，$\cos B=\frac{2}{3}$，所以 $b^2=3b^2-\frac{4}{3}ac$，则 $b^2=\frac{2}{3}ac$，………………………………………… 8 分

所以 $ac=6$，

所以 $(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=3b^2+2ac=12+12=24$，………………………………………… 10 分

解得 $a+c=2\sqrt{6}$，

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $2+2\sqrt{6}$. ………………………………………… 12 分

19. 解：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d>0$，

由 a_2,a_3+1,a_8-3 成等比数列及 $a_1=1$，得 $(a_3+1)^2=a_2(a_8-3)$，………………………………………… 1 分

即 $(2+2d)^2=(1+d)(7d-2)$，解得 $d=2$ 或 $d=-1$(舍). ………………………………………… 3 分

所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$，即 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$. ………………………………………… 4 分

(2)由(1)知 $a_n=2n-1$，因为 $b_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ a_n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ ………………………………………… 5 分

所以 $b_{2k-1}=1$，$b_{2k}=a_{2k}=4k-1\ (k\in\mathbf{N}^*)$，所以 $b_{2k-1}+b_{2k}=4k$，………………………………………… 7 分

当 $n=2k\ (k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$S_{2k}=4(1+2+\cdots+k)=2k(k+1)>2\ 024$，………………………………………… 8 分

即 $k(k+1)>1\ 012$，因为 $31\times 32=992$，$32\times 33=1\ 056$，

所以 $S_{64}=2\times 1\ 056=2\ 112>2\ 024$，………………………………………… 10 分

又 $S_{63}=S_{64}-b_{64}=2\ 112-127=1\ 985<2\ 024$，

所以满足 $S_n>2024$ 的 n 的最小值为 64. ………………………………………… 12 分

20. (1)证明：由 $AD=CD$，$BD=BD$，$\angle ADB=\angle CDB$，得 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$，………………………………………… 1 分

所以 $AB=BC=\sqrt{2}$. ………………………………………… 2 分

取 AC 的中点 O，连接 OB，OD，则 $OD\perp AC$，$OB\perp AC$，………………………………………… 3 分

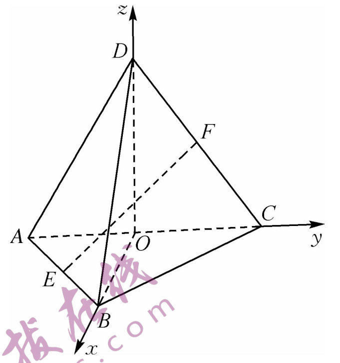
所以 $OD=\sqrt{3}$，$OB=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$，

又 $BD=2$，所以 $OD^2+OB^2=BD^2$，则 $OD\perp OB$，………………………………………… 4 分

因为 $AC\cap OB=O$，$AC,OB\subset$ 平面 ABC，所以 $DO\perp$ 平面 ABC，………………………………………… 5 分

又 $DO\subset$ 平面 ACD，所以平面 $ACD\perp$ 平面 ABC. ………………………………………… 6 分

(2)解：由(1)可知，OC，OB，OD 两两互相垂直，以 OB，OC，OD 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$. 则 $A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$B(1,0,0)$，



$D(0,0,\sqrt{3})$，$E\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(-\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2})$. ························ 8 分

设平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ -x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，解得 $x=\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$. ························ 10 分

设直线 EF 与平面 ABD 所成的角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{42}}{14}$，

故直线 EF 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$. ························ 12 分

21. (1)解：设 C 的半焦距为 c，由题意知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\\ \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ························ 2 分

解得 $\begin{cases}a=3\sqrt{2},\\ b=\sqrt{2},\\ c=4,\end{cases}$ 故 C 的方程为 $\frac{y^2}{18}+\frac{x^2}{2}=1$. ························ 4 分

(2)证明：由椭圆的对称性知 $B(1,3)$，直线 OA 的斜率为 3.

设直线 PQ 的方程为 $y=3x+m(m\neq0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$D(x_0,y_0)$，

由 $\begin{cases}y=3x+m,\\ \frac{y^2}{18}+\frac{x^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $18x^2+6mx+m^2-18=0$， ························ 5 分

$\Delta=(6m)^2-4\times18(m^2-18)=36(-m^2+36)>0$，得 $-6<m<6$，且 $m\neq0$，

则 $x_1+x_2=-\frac{1}{3}m$， ························ 6 分

若 $x_1=-1$，则 $P(-1,3)$，PQ 的方程为 $y-3=3(x+1)$，即 $y=3x+6$，此时 $m=6$，不合题意；

若 $x_2=1$，则 $Q(1,-3)$，PQ 的方程为 $y+3=3(x-1)$，即 $y=3x-6$，此时 $m=-6$，不合题意. ························ 7 分

所以 $x_1\neq-1$ 且 $x_2\neq1$，则

$k_{AP}=\frac{y_1+3}{x_1+1}=\frac{3x_1+m+3}{x_1+1}=3+\frac{m}{x_1+1}$，$k_{BQ}=\frac{y_2-3}{x_2-1}=\frac{3x_2+m-3}{x_2-1}=3+\frac{m}{x_2-1}$， ························ 8 分

所以直线 AP 的方程为 $y+3=\left(3+\frac{m}{x_1+1}\right)(x+1)$，

直线 BQ 的方程为 $y-3=\left(3+\frac{m}{x_2-1}\right)(x-1)$， ························ 9 分

两方程联立，得$(x_1-x_2+2)x=x_1+x_2$，因为$x_1+x_2=-\frac{1}{3}m$，且$m\neq 0$，

所以$x_1-x_2+2\neq 0$，所以$x=\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2+2}$，即$x_0=\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2+2}$，显然$x_0\neq 0$，

所以$y_0=\left(3+\frac{m}{x_2-1}\right)x_0-\frac{m}{x_2-1}$， …………………………………………………… 10 分

所以$k_{OD}=\frac{y_0}{x_0}=\left(3+\frac{m}{x_2-1}\right)-\frac{m}{x_2-1}\times\frac{x_1-x_2+2}{x_1+x_2}=3+\frac{m}{x_2-1}-\frac{m}{x_2-1}\times\left[-\frac{3(x_1-x_2+2)}{m}\right]$

$=3+\frac{-3(x_1+x_2)}{x_2-1}+\frac{3(x_1-x_2+2)}{x_2-1}=3+\frac{-6(x_2-1)}{x_2-1}=-3.$

故直线OD的斜率为定值-3. ……………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)当$a=0$时，$f(x)=x\ln x$，所以$f(1)=0$，即切点为$(1,0)$， ………………………………… 1 分

又$f'(x)=\ln x+1$，则$f'(1)=\ln 1+1=1$， ……………………………………………………………… 2 分

故曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y-0=1(x-1)$，即$x-y-1=0$. ……………………………… 3 分

(2)由题意知，方程$x(a+\ln x)-ax^2=0$在$(1,+\infty)$上仅有一个实数解，

则方程$a+\ln x-ax=0$在$(1,+\infty)$上仅有一个实数解. ……………………………………………… 4 分

设$g(x)=\ln x-ax+a(x>1)$，则$g'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$， ………………………………………… 5 分

当$a\leqslant 0$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

又$g(1)=\ln 1-a+a=0$，所以$x>1$时$g(x)>0$，则$g(x)$在$(1,+\infty)$上没有零点； ………………… 6 分

当$a\geqslant 1$时，$x>1$时，$ax>1$，则$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

又$g(1)=0$，所以$g(x)<0$，则$g(x)$在$(1,+\infty)$上没有零点； …………………………………………… 7 分

当$0<a<1$时，$\frac{1}{a}>1$，当$x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$时，$g'(x)>0$，当$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减，

则$g\left(\frac{1}{a}\right)>g(1)=0$，所以$g(x)$在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$上无零点. …………………………………………… 8 分

设$h(x)=e^x-x(x>0)$，则$h'(x)=e^x-1>0$，所以$h(x)>h(0)=1$，

则$e^x>x$，所以$e^{\frac{1}{a}}>\frac{1}{a}$. ……………………………………………………………………………………… 9 分

设$\varphi(x)=e^x-1-x^2(x>0)$，则$\varphi'(x)=e^x-2x$，令$m(x)=e^x-2x(x>0)$，则$m'(x)=e^x-2$，当$x\in(0,\ln 2)$，$m'(x)<0$，

当$x\in(\ln 2,+\infty)$，$m'(x)>0$，

所以$m(x)$在$(0,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增， ………………………………………… 10 分

则$m(x)\geqslant m(\ln 2)=2-2\ln 2=\ln\frac{e^2}{4}>0$，即$\varphi'(x)>0$，所以$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$\varphi(0)=0$，所以$\varphi(x)>0$，则$e^x-1>x^2$，所以$e^{\frac{1}{a}}-1>\frac{1}{a^2}$，则$1-e^{\frac{1}{a}}<-\frac{1}{a^2}$，

又$e^{\frac{1}{a}}\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，则$g(e^{\frac{1}{a}})=a-ae^{\frac{1}{a}}+\frac{1}{a}=a(1-e^{\frac{1}{a}})+\frac{1}{a}<a\left(-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{a}=0$，

又$g(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减，且$g\left(\frac{1}{a}\right)>0$，所以$g(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上有且仅有一个零点.

综上可知，a的取值范围为$(0,1)$. ………………………………………………………………………… 12 分