高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2-5x+4\leqslant 0\}$，$B=\{x|2^x<4\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

A. $[1,2]$　　B. $[1,4]$　　C. $[2,4]$　　D. $(-\infty,1]$

2. 若复数 $z=-1+\sqrt{3}i$（i为虚数单位），$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $\frac{\bar{z}}{z}=$

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　B. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　C. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　D. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

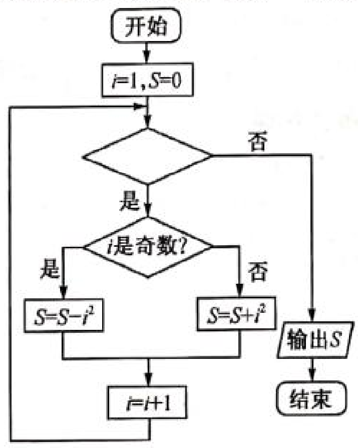
3. 若 $\tan\alpha=2$，则 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ 的值为

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}$

4. 一射手在50 m，100 m，200 m处击中目标的概率分别为0.9，0.8，0.5，则该射手在50 m，100 m，200 m处各射击一次，恰有两次击中目标的概率是

A. 0.49　　B. 0.5　　C. 0.55　　D. 0.6

5. 执行如图所示的程序框图，若输出 S 的值为10，则图中第一个判断框中的条件可以是

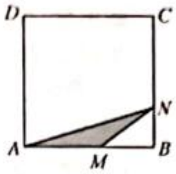


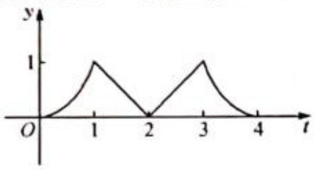
A. $i<6$?　　B. $i<5$?　　C. $i<7$?　　D. $i<4$?

6. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 且斜率为1的直线分别与 C 的两条渐近线交于 A，B 两点，若 B 为 AF 的中点，则该双曲线的离心率是

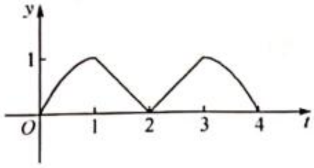
A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

7. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，点 M 从点 A 出发，沿 $A\to B\to C\to D\to A$ 方向，以每秒 2 个单位的速度在正方形 $ABCD$ 的边上运动；点 N 从点 B 出发，沿 $B\to C\to D\to A$ 的方向，以每秒 1 个单位的速度在正方形 $ABCD$ 的边上运动. 点 M 与点 N 同时出发，记运动时间为 t（单位：秒），$\triangle AMN$ 的面积为 $f(t)$（规定 A,M,N 共线时其面积为零），则点 M 第一次到达点 A 时，$y=f(t)$ 的图象为

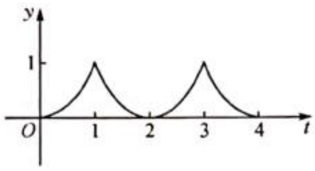




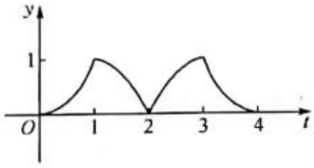
A



B



C



D

8. 一圆台的两底面半径分别为 2，4，高为 4，则该圆台外接球的表面积为

A. 48π　　B. 64π　　C. 65π　　D. 68π

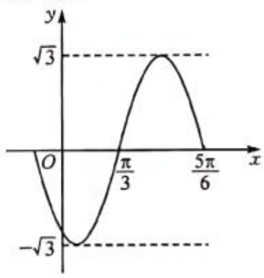
9. 已知 A 为直线 $l:3x-4y+m=0$ 上一点，点 $B(4,0)$，若 $|AB|^2+|AO|^2=16$（O 为坐标原点），则实数 m 的取值范围是

A. $[-4,16]$　　B. $[-16,4]$　　C. $(-4,16)$　　D. $(-16,4)$

10. 在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，当$\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=2$ 时，$\triangle ABC$ 面积的最大值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

11. 如图是函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的部分图象，若 $g(x)=f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$，则下列判断错误的是



A. $g\left(\frac{x}{2}\right)$ 的最小正周期为 2π

B. $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{5\pi}{2}\right]$ 上有两个极小值点

C. $g(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后得到的函数与 $f(x)$ 具有相同的零点

D. $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x\ln x-3x, & x>0,\\ x^2+4x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)-kx+1=0$ 有四个不同的实根，则实数 k 的取值范围是

A. $(-2,2)$　　B. $(0,2)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(-1,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 60°，且 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 $\lambda=$________.

14. 若 $\left(x+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 5，则该展开式中常数项为________.

15. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，若 $|AF|\cdot|BF|\leqslant 32$，则直线 l 的倾斜角的取值范围是________.

16. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$平面 ABC，$AB=AC=AA_1$，$AB\perp AC$，直线 a 和 b 分别在上底面 $A_1B_1C_1$ 和下底面 ABC 上运动，且 $a\perp b$，若 A_1C 与 a 所成的角为 60°，则 b 与侧面 ACC_1A_1 所成角的大小为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.(本小题满分 12 分)

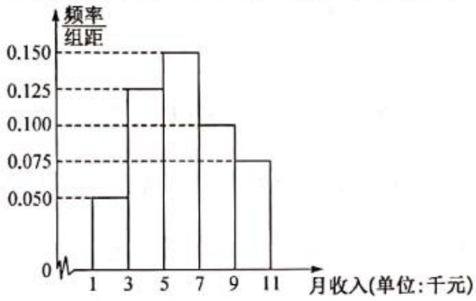
已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_{10}}{10}=2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项 a_n 及 S_n；

(2)记 $b_n=\frac{1}{a_n^2}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n. 证明：$T_n<\frac{5}{4}$.

18.(本小题满分 12 分)

下图是随机调查某城市 1 000 名有固定工作的市民月收入状况所得的频率分布直方图：



(1)以频率估计概率，在该市任取一人，其月收入以所在区间的中点值为代表，记为 X，求 X 的分布列、数学期望 $E(X)$和方差 $D(X)$(计算结果保留小数点后一位).

(2)从频率分布直方图上看，该市具有固定工作的市民的月收入近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，以样本估计总体的思想，用样本的数学期望估计 μ，用样本方差估计 σ^2，就上述正态分布求解下列问题：

①计算该市具有固定工作的市民月收入不低于 8 500 元的概率；

②在该市任取 100 名具有固定工作的市民，记这 100 人中月收入不低于 8 500 元的人数为 Y，求 Y 的数学期望(结果保留整数).

附：(1)若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.682\ 6$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.954\ 4$.

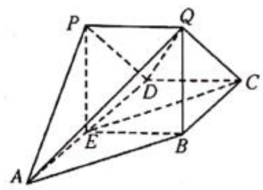
(2)参考数据：$0.05\times4.1^2+0.125\times2.1^2+0.15\times0.1^2+0.1\times1.9^2+0.075\times3.9^2\approx2.9$，$\sqrt{2.8}\approx1.7$，$\sqrt{5.8}\approx2.4$，$\sqrt{6}\approx2.5$.

19.(本小题满分 12 分)

如图，在多面体 $ABCDPQ$ 中，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AD\perp CD$，$BC\perp CD$，$AD=2CD=2BC=2a$(a 为常数)，$\triangle PAD$ 为等腰直角三角形，$PA=PD$，E 为 AD 的中点，$PQ/\!/BE$，$DQ\perp CE$.

(1)求 PQ 的长；

(2)求二面角 $B-AQ-D$ 的大小.



20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(a+\ln x)e^x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)$ 为定义域内的单调递增函数，求 a 的取值范围；

(2)当 $a\leqslant 2$ 时，证明：$f(x)<e^{2x}$.

21.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，短轴的一个端点的坐标为 $(0,-1)$.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)点 F 为椭圆 C 的右焦点，过 C 上一点 $A(x_1,y_1)(x_1y_1\neq 0)$ 的直线 $l_1:x_1x+2y_1y=2$ 与直线 $l_2:x=2$ 交于点为 P，直线 AF 交 C 于另一点 B，设 AB 与 OP 交于点 Q.

证明：(ⅰ)$\angle AFP=\frac{\pi}{2}$；(ⅱ)Q 为线段 AB 的中点.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha,\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线 C 的普通方程，并将其化为极坐标方程（化为 $\rho=f(\theta)$ 的形式）；

(2)若点 A,B 在曲线 C 上，且 $\angle AOB=90^\circ$，求 $\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}$ 的最大值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知 $f(x)=|x+a|-|x-2a|(a>0)$，$g(m)=|m-1|+|m-4|$.

(1)若对任意实数 x 和 m，不等式 $f(x)\leqslant g(m)$ 恒成立，求 a 的最大值 M；

(2)在(1)的条件下，设 $k>0$，$l>0$，且 $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=M$，求 $\frac{1}{k-1}+\frac{4}{l-1}$ 的最小值.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1.C 集合 $A=[1,4]$,$B=(-\infty,2)$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=[2,+\infty)$,所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=[2,4]$. 故选 C.

2.D $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2}{(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})}=\frac{-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 故选 D.

3.B 由 $\tan\alpha=2$,得 $\sin\alpha=2\cos\alpha$,代入 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$,$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=-\cos 2\alpha=1-2\cos^2\alpha=\frac{3}{5}$. 故选 B.

4.A $0.9\times0.8\times(1-0.5)+0.9\times(1-0.8)\times0.5+(1-0.9)\times0.8\times0.5=0.49$. 故选 A.

5.B 第一次执行循环体,$i=1$,$S=0-1^2=-1$;第二次执行循环体,$i=2$,$S=-1+2^2=3$;第三次执行循环体,$i=3$,$S=3-3^2=-6$;第四次执行循环体,$i=4$,$S=-6+4^2=10$,此时 $i=5$,结束循环,故第一个判断框中可以填入 $i<5$?. 故选 B.

6.D 设直线方程为 $y=x+c$,依题意,点 A 为直线与渐近线方程 $y=\frac{b}{a}x$ 在第一象限内的交点,联立方程组,解得 $y_A=\frac{bc}{b-a}$,点 B 为直线与渐近线方程 $y=-\frac{b}{a}x$ 在第二象限内的交点,联立方程组,解得 $y_B=\frac{bc}{b+a}$. 因为 B 为 AF 的中点,所以 $\frac{y_A+0}{2}=y_B$,即 $y_A=2y_B$,即 $\frac{bc}{b-a}=\frac{2bc}{b+a}$,即 $b=3a$,所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{10}$. 故选 D.

7.A 根据题意,可得 $f(t)=\begin{cases}t^2,0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2-t,1<t\leqslant 2,\\ t-2,2<t\leqslant 3,\\ (4-t)^2,3<t\leqslant 4.\end{cases}$ 其图象为选项 A 中的图象. 故选 A.

8.C 设该圆台的外接球的球心为 O,半径为 r,则 $\sqrt{r^2-2^2}+\sqrt{r^2-4^2}=4$(或 $\sqrt{r^2-2^2}=4+\sqrt{r^2-4^2}$),解得 $r^2=\frac{65}{4}$,所以该圆台的外接球的表面积为 $4\pi r^2=65\pi$. 故选 C.

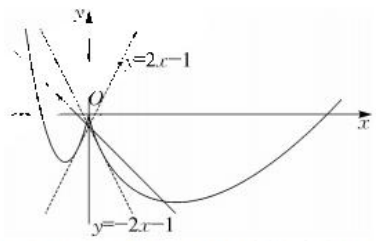
9.B 设 $A(x,y)$,因为 $|AB|^2+|AO|^2=16$,$B(4,0)$,所以 $(x-4)^2+y^2+x^2+y^2=16$,即 $(x-2)^2+y^2=4$,又点 A 在直线 l 上,所以直线 l 与圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 有公共点,所以 $\frac{|6+m|}{5}\leqslant 2$,解得 $-16\leqslant m\leqslant 4$,故实数 m 的取值范围为 $[-16,4]$. 故选 B.

10.C 因为 $2a\cos A=b\cos C+c\cos B$,所以 $2\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$,即 $2\sin A\cos A=\sin(B+C)=\sin A$,因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $\cos A=\frac{1}{2}$,$A=\frac{\pi}{3}$,所以 $a=2R\sin A=2\sqrt{3}$,由余弦定理,得 $(2\sqrt{3})^2=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc$,得 $bc\leqslant 12$(当且仅当 $b=c$ 时等号成立),所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$(当且仅当 $b=c$ 时等号成立). 故选 C.

11.D 由图象可得:$A=\sqrt{3}$;$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,所以 $\omega=2$;因为 $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{7\pi}{12}$,所以 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sqrt{3}$,即 $\sqrt{3}\sin\left(2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)=\sqrt{3}$,所以 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=1$,所以 $\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 $|\varphi|<\pi$,所以 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$,所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$,所以 $g(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x-\frac{2\pi}{3}\right)=$

$\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{6}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}\sin\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)$，所以 $g\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{6}\sin\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$，故 $g\left(\frac{x}{2}\right)$ 的最小正周期为 2π，故 A 正确；由 $g(x)$ 的图象知 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{5\pi}{2}\right]$ 上有两个极小值点，故 B 正确；$g(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后得 $y=\sqrt{6}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$，故 $g(x)$ 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后所得函数与 $f(x)$ 有相同的零点，故 C 正确；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$2x-\frac{5\pi}{12}\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 显然不是 $y=\sqrt{6}\sin x$ 的单调递增区间，所以 D 错误. 故选 D.

12. A　当 $x>0$ 时，$f'(x)=\ln x-2$，当 $x\in(0,e^2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(e^2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e^2)$ 上单调递减，在 $(e^2,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=(x+2)^2-4$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,0]$ 上单调递增，其大致图象如图所示，由 $f(x)-kx+1=0$，得 $f(x)=kx-1$，令 $g(x)=kx-1$，关于 x 的方程 $f(x)-kx+1=0$ 有四个不同的实根等价于函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象有四个不同的交点.

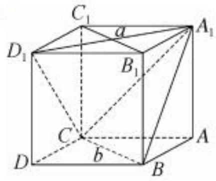


当 $x>0$ 时，$f(x)=x\ln x-3x$ 的图象在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线斜率为 $\ln x_0-2$，该切线过点 $(0,-1)$ 时，x_0 满足 $\frac{f(x_0)+1}{x_0}=\ln x_0-2$，即 $\frac{x_0\ln x_0-3x_0+1}{x_0}=\ln x_0-2$，解得 $x_0=1$，所以 $f(x)=x\ln x-3x$ 的图象过点 $(0,-1)$ 的切线斜率为 -2；$f(x)=x^2+4x$ 的图象在点 $(t,f(t))$ 处的切线斜率为 $2t+4$，该切线过点 $(0,-1)$ 时，$\frac{t^2+4t+1}{t}=2t+4$，因为 $t<0$，解得 $t=-1$，所以 $f(x)=x^2+4x$ 的图象过点 $(0,-1)$ 的切线斜率为 2. 结合函数图象可知，当 k 的取值范围是 $(-2,2)$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 的图象有四个不同的公共点. 故选 A.

13. $\frac{1}{4}$　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=0$. 即 $3\lambda\boldsymbol{e}_1^2+(3-2\lambda)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_2^2=0$，即 $3\lambda+(3-2\lambda)\times\frac{1}{2}-2=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$.

14. 280　令 $x=1$，得 $1+a=5$，解得 $a=4$，故 $\left(x+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5=\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$，$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r\cdot 2^{5-r}C_5^r x^{5-2r}$，令 $5-2r=-1$，得 $r=3$，此时该项的系数为 -40；令 $5-2r=1$，得 $r=2$，此时该项的系数为 80，所以 $\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中的常数项为 $1\times(-40)+4\times 80=280$.

15. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$　焦点 $F(2,0)$，当直线 l 的斜率不存在时，$A(2,4)$，$B(2,-4)$，$|AF|\cdot|BF|=16$，满足要求. 当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-2)$，与抛物线方程联立，得 $k^2x^2-4(k^2+2)x+4k^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4(k^2+2)}{k^2}=4\left(1+\frac{2}{k^2}\right)$，$x_1x_2=4$. 由抛物线定义知 $|AF|=x_1+2$，$|BF|=x_2+2$，所以 $|AF|\cdot|BF|=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=8+8\left(1+\frac{2}{k^2}\right)\leqslant 32$，解得 $k\geqslant 1$ 或 $k\leqslant -1$，即 $\tan\theta\geqslant 1$ 或 $\tan\theta\leqslant -1$（θ 为 l 的倾斜角），所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$，或 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$，综上可知，直线 l 的倾斜角的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.



16. 45°　将三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补为正方体 $ABDC-A_1B_1D_1C_1$，如图所示，$\triangle A_1CD_1$ 和 $\triangle A_1BC$ 均为正三角形，所以直线 a 与 A_1D_1 重合或平行时，A_1C 与 a 所成的角为 60°，此时若 $a\perp b$，则可使 b 与 BC 重合或平行，从而 b 与侧面 ACC_1A_1 所成角的大小为 45°.

17. (1)解：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_{10}}{10}=2$，

即 $\frac{12a_1+\frac{12\times 11}{2}d}{12}-\frac{10a_1+\frac{10\times 9}{2}d}{10}=2$，解得 $d=2$. ………………………… 3 分

所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，………………………… 4 分

$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………… 5 分

(2)证明：当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=\frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4n^2-4n+1}<\frac{1}{4n^2-4n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，………………………… 8 分

故当 $n\geqslant 2$ 时，

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<1+\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]=1+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，

………………………… 10 分

当 $n=1$ 时，$T_1=1<\frac{5}{4}$.

综上可知，$T_n<\frac{5}{4}$. ………………………… 12 分

18. 解：(1)依题意 $X=2,4,6,8,10$，………………………… 1 分

由频率分布直方图得每段的频率依次为 0.1，0.25，0.3，0.2，0.15，

以频率估计概率得 $P(X=2)=0.1$，$P(X=4)=0.25$，$P(X=6)=0.3$，$P(X=8)=0.2$，$P(X=10)=0.15$，… 3 分

其分布列为：

X	2	4	6	8	10
P	0.1	0.25	0.3	0.2	0.15

………………………… 4 分

所以 $EX=0.1\times 2+0.25\times 4+0.3\times 6+0.2\times 8+0.15\times 10=6.1$，………………………… 5 分

$DX=(2-6.1)^2\times 0.1+(4-6.1)^2\times 0.25+(6-6.1)^2\times 0.3+(8-6.1)^2\times 0.2+(10-6.1)^2\times 0.15\approx 5.8$.

………………………… 6 分

(2)由题意知 $\mu=6.1$，$\sigma^2=5.8$，所以 $\sigma\approx 2.4$，所以 $X\sim N(6.1,2.4^2)$. ………………………… 7 分

①$\mu+\sigma=8.5$，所以 $P(X\geqslant 8.5)=\frac{1-P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)}{2}=\frac{1-0.6826}{2}=0.1587$. ………………………… 9 分

②根据题意 $Y\sim B(100,0.1587)$，所以 $E(Y)=100\times 0.1587=15.87\approx 16$，即 Y 的数学期望为 16. ……………… 12 分

19. 解：(1)连接 BD，因为 $AD\perp CD$，$BC\perp CD$，$AD=2CD=2BC=2a$，E 为 AD 的中点，

所以四边形 $BCDE$ 为正方形，所以 $CE\perp BD$，$BE\perp AD$. ………………………… 1 分

因为 $PA=PD$，E 为 AD 中点，所以 $PE\perp AD$.

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PE\subset$ 平面 PAD，

所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，$BE\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PE\perp BE$，………………………… 2 分

PE，$BE\subset$ 平面 $BEPQ$，$PE\cap BE=E$，所以 $AD\perp$ 平面 $BEPQ$，又 $BQ\subset$ 平面 $BEPQ$，

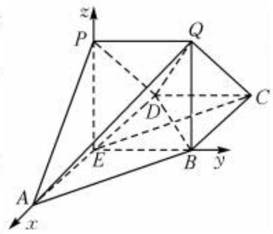
所以 $AD\perp BQ$， ………………………………………………………………………………… 3 分

因为 $DQ\perp CE$，因为 $DQ\cap BD=D$，DQ，$BD\subset$平面 BDQ，则 $CE\perp$平面 BDQ，

因为 $BQ\subset$平面 BDQ，则 $CE\perp BQ$， ……………………………………………………………… 4 分

因为 AD，$CE\subset$平面 $ABCD$，$AD\cap CE=E$，所以 $BQ\perp$平面 $ABCD$，所以 $BQ/\!/PE$，

又 $PQ/\!/BE$，所以四边形 $BEPQ$ 为矩形，此时 $PQ=BE=a$. ………………………………………… 6 分



(2)由(1)知 EA，EB，EP 两两垂直，以点 E 为坐标原点，EA，EB，EP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$，设 $a=1$，则 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$D(-1,0,0)$，$Q(0,1,1)$，则$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BQ}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{AQ}=(-1,1,1)$.

……………………………………………………………………………………………… 8 分

设平面 ABQ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x_1+y_1=0,\\ z_1=0,\end{cases}$令 $y_1=1$，得

$x_1=1$，所以平面 ABQ 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$； ………………………………………… 9 分

设平面 ADQ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x_2=0,\\ -x_2+y_2+z_2=0,\end{cases}$令 $y_2=1$，得 $z_2=-1$，得平面 ADQ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$， ……………………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

由图知二面角 $B-AQ-D$ 为锐二面角，所以二面角 $B-AQ-D$ 的大小为 $60°$. ……………………… 12 分

20. (1)解：函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=(\dfrac{1}{x}+a+\ln x)e^x$. ……………………………… 1 分

因为 $f(x)$为$(0,+\infty)$上的单调递增函数，则 $f'(x)\geqslant0$，即$\left(\dfrac{1}{x}+a+\ln x\right)e^x\geqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，

又 $e^x>0$，所以$\dfrac{1}{x}+a+\ln x\geqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，即$-a\leqslant\dfrac{1}{x}+\ln x$ 在$(0,+\infty)$上恒成立. ………… 2 分

令 $h(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$，则 $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x^2}$.

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $x=1$ 是 $h(x)$在$(0,+\infty)$内的极小值点，也是最小值点，

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=1$，所以$-a\leqslant1$，即 $a\geqslant-1$. …………………………………………… 6 分

(2)证明：$f(x)<e^{2x}$，即 $a+\ln x<e^x$，即 $e^x-\ln x>a$，因为 $a\leqslant2$，故只需证明 $e^x-\ln x>2$. ………… 7 分

法一：

先证明 $e^x>x+1(x>0)$. 设 $\varphi(x)=e^x-x-1(x>0)$，则 $\varphi'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时 $\varphi'(x)>0$，

所以 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以对$\forall x>0$，$\varphi(x)>\varphi(0)=0$，

所以对$\forall x>0$，$e^x>x+1$. ① ……………………………………………………………………… 9 分

再证明 $\ln x\leqslant x-1$.

设 $\varphi(x)=\ln x-x+1$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，当 $0<x<1$，$\varphi'(x)>0$，$x>1$ 时，$\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=0$，即对$\forall x>0$，$\varphi(x)\leqslant0$，即 $\ln x\leqslant x-1$.

所以 $-\ln x \geqslant -x+1$. ② ………………………………………………………… 11 分

①②两不等式相加得 $e^x - \ln x > (x+1)-(x-1)=2$, 即 $e^x - \ln x > 2$.

所以当 $a \leqslant 2$ 时, $f(x) < e^{2x}$. ………………………………………………………… 12 分

法二:

因为 $x>0$, 所以 $e^x - \ln x > 2$ 等价于 $\frac{e^x}{x} > \frac{\ln x+2}{x}$,

设 $h(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$, 则 $h'(x)=\frac{e^x x - e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$, 所以在 $(0,1)$ 上 $h'(x)<0$, 在 $(1,+\infty)$ 上 $h'(x)>0$,

所以所以在 $(0,1)$ 上 $h(x)$ 单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上 $h(x)$ 单调递增, 所以 $h(x)_{\min}=h(1)=e$, ……………… 9 分

同理设 $m(x)=\frac{\ln x+2}{x}(x>0)$, 可求其最大值 $m(e^{-1})=e$,

所以 $\frac{e^x}{x} > \frac{\ln x+2}{x}$,

所以当 $a \leqslant 2$ 时, $f(x) < e^{2x}$. ………………………………………………………… 12 分

法三:

令 $g(x)=e^x - \ln x - 2$, 则 $g'(x)=e^x-\frac{1}{x}$, 显然 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

因为 $g'(1)=e-1>0$, $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$,

所以存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得 $g'(x_0)=0$, 即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$, 所以 $x_0=-\ln x_0$, ………………………… 9 分

所以在 $(0,x_0)$ 上, $g'(x)<0$, 在 $(x_0,+\infty)$ 上, $g'(x)>0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2>2-2=0$,

所以, 当 $a \leqslant 2$ 时, $f(x) < e^{2x}$. ………………………………………………………… 12 分

21. (1)解: 设椭圆 C 的半焦距为 c,

因为 C 的短轴的一个端点的坐标为 $(0,-1)$, 所以 $b=1$, 所以 $a^2-c^2=1$. ① ……………………… 1 分

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $a=\sqrt{2}c$. ② ………………………………………………… 2 分

由①②, 得 $c=1$, 所以 $a=\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………… 4 分

(2)证明: (ⅰ)将 $x=2$ 代入 $x_1x+2y_1y=2$, 得 $2x_1+2y_1y=2$, 解得 $y=\frac{1-x_1}{y_1}$, 所以 $P\left(2,\frac{1-x_1}{y_1}\right)$. ……… 5 分

又 $F(1,0)$, $A(x_1,y_1)$, 所以 $\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$, $\overrightarrow{FP}=\left(1,\frac{1-x_1}{y_1}\right)$,

$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FP}=x_1-1+y_1\cdot\frac{1-x_1}{y_1}=0$, 所以 $FA \perp FP$, 故 $\angle AFP=\frac{\pi}{2}$. ……………………… 6 分

(ⅱ)由直线 AB 过焦点 $F(1,0)$, 得直线 AB 的方程为 $(x_1-1)y=y_1(x-1)$, ……………………… 7 分

代入 $x^2+2y^2=2$, 并结合 $x_1^2+2y_1^2=2$ 整理, 得 $(3-2x_1)y^2+2(x_1-1)y_1y-y_1^2=0$.

设 $B(x_2,y_2)$, 则 $y_1+y_2=-\frac{2(x_1-1)y_1}{3-2x_1}$. ……………………………………………

设 AB 中点为 $R(x_0,y_0)$，则 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{(x_1-1)y_1}{3-2x_1}$， …………………………………… 9 分

$x_0=\frac{x_1-1}{y_1}y_0+1=\frac{x_1-1}{y_1}\left[-\frac{(x_1-1)y_1}{3-2x_1}\right]+1=\frac{2y_1^2}{3-2x_1}$，

即 $R\left(\frac{2y_1^2}{3-2x_1},-\frac{(x_1-1)y_1}{3-2x_1}\right)$， …………………………………… 10 分

所以 $\overrightarrow{OR}=\frac{y_1^2}{3-2x_1}\left(2,\frac{1-x_1}{y_1}\right)=\frac{y_1^2}{3-2x_1}\overrightarrow{OP}$，即 $\overrightarrow{OR}$，$\overrightarrow{OP}$ 共线， …………………………………… 11 分

即 AB 的中点 R 在直线 OP 上，从而点 R 与 Q 重合，

故 Q 是线段 AB 的中点. …………………………………… 12 分

22. 解：(1) 由题意得 $\frac{x-1}{2}=\cos\alpha$，$\frac{y}{\sqrt{3}}=\sin\alpha$，

得 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，即曲线 C 的普通方程为 $3x^2+4y^2-6x=9$. …………………………………… 2 分

把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得 $3\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta-6\rho\cos\theta=9$，

即 $4\rho^2=\rho^2\cos^2\theta+6\rho\cos\theta+9$. 即 $4\rho^2=(\rho\cos\theta+3)^2$.

根据曲线 C 的参数方程，$-1\leqslant x\leqslant 3$，故 $\rho\cos\theta+3=x+3>0$，所以 $\rho=\frac{3}{2-\cos\theta}$. …………………………………… 5 分

(2) 设 $A(\rho_1,\theta)$，则 $B(\rho_2,\theta\pm 90^\circ)$. …………………………………… 6 分

所以 $\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{2-\cos\theta}{3}+\frac{2-\cos(\theta\pm 90^\circ)}{3}=\frac{4-(\cos\theta\pm\sin\theta)}{3}$

$=\frac{4-\sqrt{2}\cos(\theta\mp 45^\circ)}{3}\leqslant\frac{4+\sqrt{2}}{3}$， …………………………………… 9 分

即 $\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}$ 的最大值为 $\frac{4+\sqrt{2}}{3}$. …………………………………… 10 分

23. 解：(1) 根据题意，得 $f(x)_{\max}\leqslant g(m)_{\min}$. …………………………………… 1 分

因为 $f(x)=|x+a|-|x-2a|\leqslant|(x+a)-(x-2a)|=|3a|=3a$（当且仅当 $x\geqslant 2a$ 时取等号），

所以 $f(x)_{\max}=3a$； …………………………………… 3 分

因为 $g(m)\geqslant|(m-1)-(m-4)|=3$（当且仅当 $1\leqslant m\leqslant 4$ 时取等号），

所以 $g(m)_{\min}=3$. …………………………………… 4 分

于是 $0<3a\leqslant 3$，解得 $0<a\leqslant 1$，所以 $M=1$. …………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 得 $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=1$，因为 k,l 为正实数，所以 $k>1,l>1$，得 $k-1>0,l-1>0$， …………………………………… 6 分

由 $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=1$，得 $k+l=kl$，即 $(k-1)(l-1)=1$， …………………………………… 7 分

所以 $\frac{1}{k-1}+\frac{4}{l-1}\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{(k-1)(l-1)}}=4$. …………………………………… 9 分

当且仅当 $\begin{cases}l-1=4(k-1),\\(l-1)(k-1)=1,\end{cases}$ $k=\frac{3}{2}$，$l=3$ 时等号成立，

所以 $\frac{1}{k-1}+\frac{4}{l-1}$ 的最小值为 4. ……………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》