

2023 届 12 月高三联合测评(福建)

数 学

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并收回。
4. 本卷主要考查内容:高考范围(除概率)。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x+1}{x-3} \leq 0, x \in \mathbb{Z} \right\}$, 则集合 A 的真子集的个数为
A. 16 B. 15 C. 32 D. 31
2. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 2, b = (1, 3)$, 且 $a \cdot b = 4$, 则向量 a, b 夹角的余弦值为
A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$
3. 在前 n 项和为 S_n 的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_3 = -2, a_3 + a_4 = 4$, 则 $S_8 =$
A. 80 B. 85 C. 90 D. 95
4. “ $m=0$ ”是“直线 $l_1: mx + (2m-1)y + 1 = 0$ 与直线 $l_2: mx + (2m-1)y - 1 = 0$ 之间的距离为 2”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{t^2} = 1 (t > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{y^2}{t^2} - x^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 , 则 $e_1 e_2$ 的最小值为
A. $\frac{15}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{2}$
6. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ (其中 $\omega > 0$) 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围为
A. $(0, 1]$ B. $(0, 2]$ C. $[1, 2]$ D. $(1, 2)$
7. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中, O 为 $\triangle ABC$ 的中心, 已知 $AB=6, \angle APB=2\angle PAO$, 则该正三棱锥的外接球的表面积为
A. 49π B. 36π C. 32π D. 28π

【高三数学 第 1 页(共 4 页)】

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - \ln x$, 其中 e 是自然对数的底数. 若直线 $y = -\frac{1}{2}x + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切于不同的两点 A, B , 且 A, B 的横坐标分别为 x_1, x_2 ($x_1 < 2 < x_2$), 则实数 a 的值为
- A. e^2 B. $e+1$ C. $2\ln 2$ D. $1+\ln 2$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复数 z 满足 $z - 2i = zi + 4$, 则下列说法中正确的是
- A. 复数 z 的模为 $\sqrt{10}$ B. 复数 z 在复平面内所对应的点在第四象限
- C. 复数 z 的共轭复数为 $-1+3i$ D. $\left(\frac{z-1}{3}\right)^{2023} = -i$
10. 已知 α, β 满足 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, 且 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = -\frac{3}{5}$, 则
- A. $\beta + \alpha < \pi$ B. $\beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$
- C. $\beta - 2\alpha = 0$ D. $\tan 2\alpha + \tan 2\beta > 0$
11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 对于任意的实数 x, y , 都有 $f(x+y) = f(x)f(y)$. 且当 $x > 0$ 时, $0 < f(x) < 1$. 则下列结论正确的是
- A. $f(0) = 1$
- B. 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) > 0$
- C. 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增
- D. 若 $f(3) = \frac{1}{27}$, 则不等式 $f(2x)f(x-2x^2) \leq \frac{1}{3}$ 的解集为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
12. 已知抛物线 $y^2 = 2p_1x$ ($p_1 > 0$) 与抛物线 $x^2 = 2p_2y$ ($p_2 > 0$) 在第一象限内的交点为 $P(x_0, y_0)$, 若点 P 在圆 $C: (x - \sqrt{10})^2 + (y - \sqrt{10})^2 = 8$ 上, 则
- A. $x_0 + y_0$ 的取值范围为 $[2\sqrt{10} - 4, 2\sqrt{10} + 4]$
- B. 当直线 OP 与圆 C 相切时, $p_1 p_2$ 的值为 $\frac{3}{5}$
- C. $p_1 p_2$ 的最大值为 $\frac{7}{2} + \sqrt{10}$
- D. $p_1 p_2$ 的最小值为 $\frac{1}{2} - \sqrt{10}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$. 将该菱形绕 AB 旋转一周, 所形成几何体的体积为 _____.
14. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 且 $f(x+4) = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 的解析式可以为 $f(x) =$ _____, 出一个符合题意的函数即可.
15. 若函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x$ (其中 $x \in (1, +\infty)$) 存在最小值, 则实数 a 的取值范围为 _____.
16. 已知数列 $\{a_n\}$, 若一个新数列的前 n 项和为 na_n , 则称该数列为数列 $\{a_n\}$ 的“一阶衍生数列”, 记作数列 $\{(a_n)_1\}$; 同样的, 若再有一个新数列的前 n 项和为 $n(a_n)_1$, 则称该数列为数列 $\{a_n\}$ 的“二阶衍生数列”, 记作数列 $\{(a_n)_2\}$; 以此类推……. 记 $(a_n)_k$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“ k 阶衍生数列”中的第 m 项. 已知 $a_n^{\alpha} = 2n-1$, 则 $(a_3)_2 =$ _____; 设数列 $\{(a_3)_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_n =$ _____. (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

从① $b_n = \frac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}$;② $b_n = (-1)^n(a_{n+1} + a_n)$;③ $b_n = \frac{2^n}{a_n}$ 三个选项中,任选一个填入下列

空白处,并求解.

已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_n > 0$,且 $a_1 = 1, a_n - a_{n+1} = a_{n+1}a_n$, _____,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,已知 $a + 3b = 6, C = \frac{\pi}{3}$.

21

(1)若 $a = 3$,求 $\tan B$ 的值;

(2)求 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BA} \cdot \vec{BC}$ 的最小值.

19. (本小题满分 12 分)

已知等轴双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$.

(1)求双曲线 C 的标准方程;

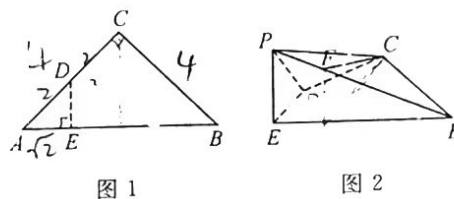
22

(2)过双曲线 C 的右焦点 F 的直线与双曲线 C 的右支交于 A, B 两点,请问 x 轴上是否存在一定点 P ,使得 $\angle APF = \angle BPF$? 若存在,请求出定点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

20. (本小题满分 12 分)

如图 1, 在等腰直角三角形 ABC 中, $AC=BC=4$, D 是 AC 的中点, E 是 AB 上一点, 且 $DE \perp AB$. 将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 折起, 形成四棱锥 $P-BCDE$, 其中点 A 对应的点为点 P , 如图 2.

- (1) 在图 2 中, 在线段 PB 上是否存在一点 F , 使得 $CF \parallel$ 平面 PDE ? 若存在, 请求出 $\frac{PF}{PB}$ 的值, 并说明理由; 若不存在, 请说明理由;
- (2) 在图 2 中, 平面 PBE 与平面 PCD 所成的锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求四棱锥 $P-BCDE$ 的体积.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 动直线 $l: y = mx + n$ 与椭圆 C 相切, 且当 $m=1$ 时, $n = \sqrt{7}$.

切, 且当 $m=1$ 时, $n = \sqrt{7}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 作 $F_1P \perp l, F_2Q \perp l$, 垂足分别为 P, Q , 求四边形 F_1F_2QP 的面积的最大值.

2. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 e^{2x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 2ax + 2 \ln x + 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

$x=0$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线