

★启用前注意保密

2023 届大湾区普通高中毕业班第一次联合模拟考试

数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

- 注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的市（县、区）、学校、姓名、班级、座位号和准考证号填写在答题卡上，并填涂 10 位准考证号（考号）。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 4\}$ ， $B = \{x | 0 < x \leq 3\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\{x | -1 < x < 4\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 3\}$ C. $\{x | -1 < x \leq 3\}$ D. $\{x | 0 < x < 4\}$

2. 复数 z 满足 $z(1-i) = 2i$ (i 为虚数单位)，则复数 $z =$

- A. $-1-i$ B. $1+i$ C. $1-i$ D. $-1+i$

3. 为深入推进“五育”并举，促进学生身心全面和谐发展，某校于上周六举办跳绳比赛。现通过简单随机抽样获得了 22 名学生在 1 分钟内的跳绳个数如下（单位：个）：

69 77 92 98 99 100 102 103 115 116 116
122 123 124 127 128 129 134 140 142 143 159

估计该校学生在 1 分钟内跳绳个数的第 65 百分位数为

- A. 124 B. 125.5 C. 127 D. 127.5

4. 图 1 是南北方向、水平放置的圭表（一种度量日影长的天文仪器，由“圭”和“表”两个部件组成）示意图，其中表高 $PM = h$ ，日影长 $PN = l$ 。图 2 是地球轴截面的

示意图，虚线表示点 A 处的水平面. 已知某测绘兴趣小组在冬至日正午时刻（太阳直射点的纬度为南纬 $23^{\circ}26'$ ）在某地利用一表高为 2dm 的圭表按图 1 方式放置后，测得日影长为 2.98dm ，则该地的纬度约为北纬

（参考数据： $\tan 34^{\circ} \approx 0.67$ ， $\tan 56^{\circ} \approx 1.49$ ）

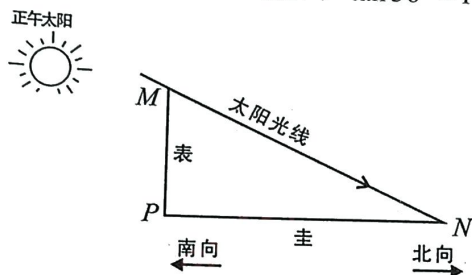


图 1

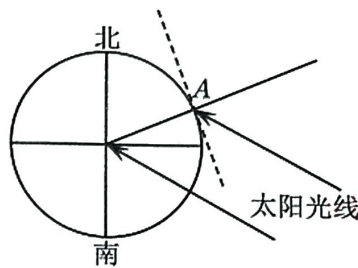
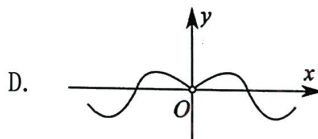
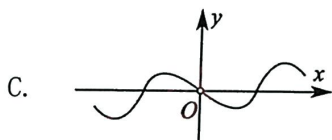
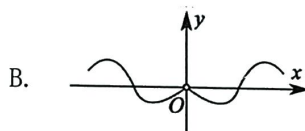
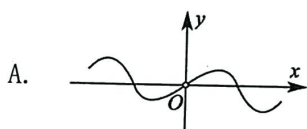


图 2

- A. $23^{\circ}26'$ B. $32^{\circ}34'$ C. 34° D. 56°

5. 函数 $y = \sin x \cdot \ln \frac{x^2+1}{x^2}$ 的图象可能为



6. 已知 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的左焦点， P 为其右支上一点，点 $A(0, -6)$ ，则

$\triangle APF$ 周长的最小值为

- A. $4+6\sqrt{2}$ B. $4+6\sqrt{5}$ C. $6+6\sqrt{2}$ D. $6+6\sqrt{5}$

7. 与正三棱锥 6 条棱都相切的球称为正三棱锥的棱切球. 若正三棱锥的底面边长为 $2\sqrt{6}$ ，侧棱长为 3，则此正三棱锥的棱切球半径为

- A. $\sqrt{6}-2$ B. $\sqrt{6}+2$ C. $6\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, 且 $2S_n = a_{n+1} - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$. 若对任意的正整数 n , 都有 $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \dots + a_n b_1 = 3^n - n - 1$ 成立, 则满足等式 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = a_n$ 的所有正整数 n 为

- A. 1或3 B. 2或3 C. 1或4 D. 2或4

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, 直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 7m - 4 = 0$, 则

- A. 直线 l 过定点 $(3,1)$
 B. 直线 l 与圆 C 可能相离
 C. 圆 C 被 y 轴截得的弦长为 $4\sqrt{6}$
 D. 圆 C 被直线 l 截得的弦长最短时, 直线 l 的方程为 $x + 2y - 5 = 0$

10. 函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示,

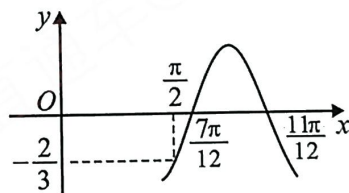
$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$, 则下列选项中正确的有

A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$

B. $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 是奇函数

C. $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$

D. $f'\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + f'\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = 0$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数



11. 随着春节的临近,小王和小张等4位同学准备互相送祝福.他们每人写了一个祝福的贺卡,这四张贺卡收齐后让每人从中随机抽取一张作为收到的新春祝福,则

A. 小王和小张恰好互换了贺卡的概率为 $\frac{1}{6}$

B. 已知小王抽到的是小张写的贺卡的条件下,小张抽到小王写的贺卡的概率为 $\frac{1}{3}$

C. 恰有一个人抽到自己写的贺卡的概率为 $\frac{1}{3}$

D. 每个人抽到的贺卡都不是自己写的概率为 $\frac{5}{8}$

12. 已知正数 a, b 满足等式 $a^2 - b = 2(2\ln b - \ln a)$,则下列不等式中可能成立的有

A. $a > b^2 > \frac{1}{2}$

B. $a < b^2 < \frac{1}{2}$

C. $a > b > 1$

D. $b < a < 1$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x > 0 \\ ax^2 + x, & x < 0 \end{cases}$ 为奇函数,则 $a =$ _____.

14. $(x+y)(x-y)^6$ 的展开式中 x^3y^4 的系数为_____ (用数字作答).

15. 若 $\frac{\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x}{\sin x - \sqrt{3} \cos x} = 1$,则 $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) =$ _____.

16. 设 A, B 是平面直角坐标系中关于 y 轴对称的两点,且 $|\overline{OA}| = 2$.若存在 $m, n \in R$,使得 $m\overline{AB} + \overline{OA}$ 与 $n\overline{AB} + \overline{OB}$ 垂直,且 $|(m\overline{AB} + \overline{OA}) - (n\overline{AB} + \overline{OB})| = 2$,则 $|\overline{AB}|$ 的最小值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数. 若分别从下表的第一、二、三列中各取一个数, 依次作为 a_1, a_2, a_3 , 且 a_1, a_2, a_3 中任何两个数都不在同一行.

	第一列	第二列	第三列
第一行	4	5	11
第二行	3	10	9
第三行	8	7	6

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{16}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 5)}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 求证: $T_n < \frac{3}{4}$.

18. (12 分)

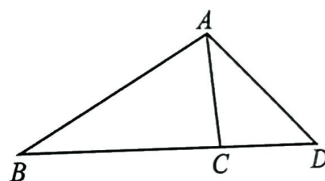
如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

已知 $(b+c)\cos A - a\cos B - a\cos C = 0$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 D 为线段 BC 延长线上一点, 且 $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$, $BD = 3CD$,

求 $\tan \angle ACB$.



19. (12 分)

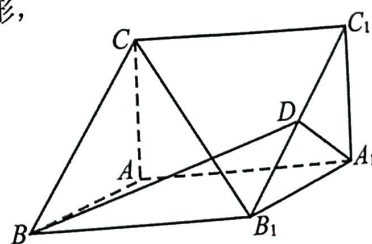
如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 ACC_1A_1 为矩形,

$AB \perp AC$ 且 $AB = AC = 2$, D 为 B_1C_1 的中点,

$AA_1 = B_1C = 2\sqrt{2}$.

(1) 证明: $AC_1 \parallel$ 平面 A_1BD ;

(2) 求平面 AB_1C 与平面 AA_1D 的夹角的余弦值.



20. (12分)

在数字通信中, 信号是由数字“0”和“1”组成的序列. 现连续发射信号 n 次, 每次发射信号“0”和“1”是等可能的. 记发射信号“1”的次数为 X .

(1) 当 $n=6$ 时, 求 $P(X \leq 2)$;

(2) 已知切比雪夫不等式: 对于任一随机变量 Y , 若其数学期望 $E(Y)$ 和方差 $D(Y)$

均存在, 则对任意正实数 a , 有 $P(|Y - E(Y)| < a) \geq 1 - \frac{D(Y)}{a^2}$. 根据该不等式可以

对事件“ $|Y - E(Y)| < a$ ”的概率作出下限估计. 为了至少有98%的把握使发射信号“1”的频率在0.4与0.6之间, 试估计信号发射次数 n 的最小值.

21. (12分)

设抛物线方程为 $y^2 = 2x$, 过点 P 的直线 PA, PB 分别与抛物线相切于 A, B 两点, 且点 A 在 x 轴下方, 点 B 在 x 轴上方.

(1) 当点 P 的坐标为 $(-1, -2)$ 时, 求 $|AB|$;

(2) 点 C 在抛物线上, 且在 x 轴下方, 直线 BC 交 x 轴于点 N . 直线 AB 交 x 轴于

点 M , 且 $4|AM| < 3|BM|$. 若 $\triangle ABC$ 的重心在 x 轴上, 求 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BMN}}$ 的最大值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 是两个不相等的正数, 且 $a + \ln b = b + \ln a$, 证明: $a + b + \ln ab > 2$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

