

绝密 ★ 启用前

## 2023 普通高等学校招生全国统一考试·冲刺押题卷(二)

# 数 学

全卷满分 150 分 考试时间 120 分钟

★祝考试顺利★

### 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上。
2. 作答时,将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 考试结束后,本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

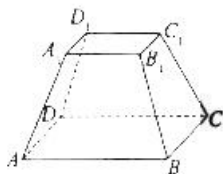
1. 已知集合  $A = \{x \mid |x| < 1\}$ ,  $B = \{y \mid y = 2^x + 1\}$ , 则  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$   
 A.  $(1, +\infty)$       B.  $[1, +\infty)$       C.  $(-1, 1)$       D.  $(2, +\infty)$
2. 若复数  $\frac{a+bi}{4+3i}$  ( $i$  为虚数单位,  $a, b \in \mathbb{R}$  且  $b \neq 0$ ) 为纯虚数, 则  $\frac{a}{b} =$   
 A.  $\frac{4}{3}$       B.  $-\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $-\frac{3}{4}$
3. 生物学家为了了解抗生素对生态环境的影响,常通过检测水中生物体内抗生素的残留量来进行判断。已知水中某生物体内抗生素的残留量  $y$  (单位:mg) 与时间  $t$  (单位:年) 近似满足关系式  $y = \lambda(1 - 3^{-t})$ ,  $\lambda \neq 0$ , 其中  $\lambda$  为抗生素的残留系数。当  $t=8$  时,  $y = \frac{8}{9}\lambda$ , 则  $\lambda =$   
 A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{1}{4}$
4. 角谷猜想,也叫  $3n+1$  猜想,是由日本数学家角谷静夫发现的,是指对于每一个正整数,如果它是奇数,则对它乘 3 再加 1; 如果它是偶数,则对它除以 2, 如此循环最终都能够得到 1, 如: 取  $n=10$ , 根据上述过程, 得出 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 共 7 个数。上述过程得到的 7 个整数中, 随机选取两个不同的数, 则两个数都是奇数的概率为  
 A.  $\frac{1}{15}$       B.  $\frac{2}{15}$       C.  $\frac{1}{21}$       D.  $\frac{2}{21}$
5. 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  为线段  $BC$  上一点, 且  $BD=2CD$ , 则  $\overrightarrow{AD} =$   
 A.  $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$       B.  $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$       C.  $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$       D.  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
6. 在  $\triangle ABC$  中, “ $\tan A \tan B = 1$ ” 是 “ $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$ ” 的  
 A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

【2023 高考冲刺卷·数学卷(二) 第 1 页(共 4 页) 新卷】

7. 设  $a=0.98+\sin 0.01, b=e^{-0.01}, c=\frac{1}{2}(\log_{2022} 2023+\log_{2023} 2022)$ , 则  
 A.  $a>b>c$       B.  $b>a>c$       C.  $c>a>b$       D.  $c>b>a$
8. 已知函数  $f(x)=\sin\left(2x+\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$  ( $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ ) 的一个极大值点为  $x=\frac{\pi}{6}$ , 若  $f(x)$  在区间  $[-a, a]$  ( $a>0$ ) 上单调递增, 则  $a$  的最大值为  
 A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{2}$       D.  $\frac{2\pi}{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

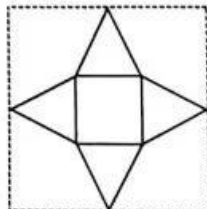
9. 已知  $A, B$  是抛物线  $C: y^2=4x$  上两动点,  $F$  为抛物线  $C$  的焦点, 则下列说法正确的是  
 A. 直线  $AB$  过焦点  $F$  时,  $|AB|$  最小值为 4 来源: 高三答案公众号  
 B. 直线  $AB$  过焦点  $F$  且倾斜角为  $60^\circ$  时 (点  $A$  在第一象限),  $|AF|=2|BF|$   
 C. 若  $AB$  中点  $M$  的横坐标为 3, 则  $|AB|$  最大值为 8  
 D. 点  $A$  坐标  $(4, 4)$ , 且直线  $AF, AB$  斜率之和为 0,  $AF$  与抛物线的另一交点为  $D$ , 则直线  $BD$  的方程为  $4x+8y+7=0$
10. 如图, 已知正四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的上下底面边长分别为  $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ , 其顶点都在同一球面上, 且该球的表面积为  $20\pi$ , 则侧棱长为  
 A.  $\sqrt{2}$   
 B. 2  
 C.  $\sqrt{6}$   
 D.  $\sqrt{10}$



11. 已知  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $y=f(x)$  在区间  $[-1, 0]$  上单调递增, 且恒有  $f(1-x)+f(1+x)=0$  成立, 则下列说法正确的是  
 A.  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上是增函数      B.  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 0)$  对称  
 C. 函数  $f(x)$  在  $x=2$  处取得最小值      D. 函数  $y=f(x)$  没有最大值
12. 若实数  $x, y$  满足  $4\ln x+2\ln(2y)\geq x^2+8y-4$ , 则  
 A.  $xy=\frac{\sqrt{2}}{4}$       B.  $x+y=\sqrt{2}$       C.  $x+2y=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$       D.  $x^2y=1$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知二项式  $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 的展开式中最后三项的二项式系数和为 79, 则  $n=$  \_\_\_\_\_.
14. 已知函数  $f(x)=\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+2$ , 则  $f(x)$  的最大值为 \_\_\_\_\_.
15. 边长为 2 的正方形, 经如图所示的方式裁剪后, 可围成一个正四棱锥, 则此正四棱锥的外接球的表面积的最小值为 \_\_\_\_\_.
16. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$  ( $a>b>0$ ) 的左、右焦点分别为  $F, F'$ , 离心率为  $\frac{2}{3}$ ,  $A$  为椭圆  $C$  的左顶点, 且  $\vec{AF} \cdot \vec{AF'}=5$ , 过原点的直线交椭圆  $C$  于  $M, N$  两点, 则  $\frac{1}{|FM|}+\frac{4}{|FN|}$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1=1, a_n \neq 0, a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$ , 其中  $\lambda$  为常数.

(1) 证明:  $a_{n+2} - a_n = \lambda$ ; 来源: 高三答案公众号

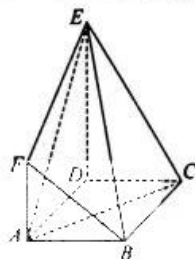
(2) 当数列  $\{a_n\}$  为等差数列时, 记数列  $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 证明:  $T_n < 1$ .

18. (12 分)

如图, 在多面体  $ABCDEF$  中, 四边形  $ABCD$  是正方形,  $AF \parallel DE, DE = 2AF = 2AD, DE \perp AD, AC \perp BE$ .

(1) 证明: 平面  $ADEF \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 求平面  $ACE$  与平面  $ABF$  所成锐二面角的余弦值.



19. (12 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 且  $\frac{2\sin A - \sin C}{\sin C} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}$ .

(1) 求角  $B$  的大小;

(2) 若  $D$  是  $AC$  边上的一点, 且  $AD : DC = 1 : 2, BD = 1$ , 当  $a + 3c$  取最大值时, 求  $\triangle ABC$  的面积.

20. (12分)

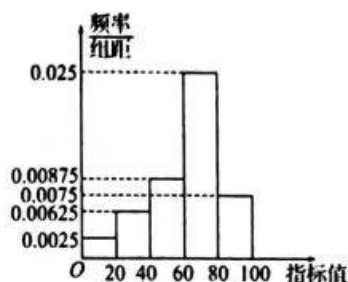
为了检测某种抗病毒的免疫效果,需要进行动物与人体试验.研究人员将疫苗注射到200只小白鼠体内,一段时间后测量小白鼠的某项指标值,按 $[0, 20)$ ,  $[20, 40)$ ,  $[40, 60)$ ,  $[60, 80)$ ,  $[80, 100]$ 分组,绘制频率分布直方图如图所示.试验发现小白鼠体内产生抗体的共有160只,其中该项指标值不小于60的有110只.

假设小白鼠注射疫苗后是否产生抗体相互独立.

(1)填写下面的 $2 \times 2$ 列联表,并根据列联表及 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,判断能否认为注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于60有关.

单位:只

抗体	指标值		合计
	小于60	不小于60	
有抗体			
没有抗体			
合计			



(2)为检验疫苗二次接种的免疫抗体性,对第一次注射疫苗后没有产生抗体的40只小白鼠进行第二次注射疫苗,结果又有20只小白鼠产生抗体.

(i)用频率估计概率,求一只小白鼠注射2次疫苗后产生抗体的概率 $p$ ;

(ii)以(i)中确定的概率 $p$ 作为人体注射2次疫苗后产生抗体的概率,进行人体接种试验,记 $n$ 个人注射2次疫苗后产生抗体的数量为随机变量 $X$ .试验后统计数据显示,当 $X=99$ 时, $P(X)$ 取最大值,求参加人体接种试验的人数 $n$ 及 $E(X)$ .

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$  (其中 $n=a+b+c+d$ 为样本容量).

$a$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.100	0.050	0.025
$\chi^2$	0.450	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024

21. (12分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率是 $\sqrt{5}$ ,点 $F$ 是双曲线 $C$ 的一个焦点,且点 $F$ 到双曲线 $C$ 的一条渐近线的距离是2.

(1)求双曲线 $C$ 的标准方程;

(2)设点 $M$ 在直线 $x = \frac{1}{4}$ 上,过点 $M$ 作两条直线 $l_1, l_2$ ,直线 $l_1$ 与双曲线 $C$ 交于 $A, B$ 两点,直线

$l_2$ 与双曲线 $C$ 交于 $D, E$ 两点.若直线 $AB$ 与直线 $DE$ 的倾斜角互补,证明: $\frac{|MA|}{|MD|} = \frac{|ME|}{|MB|}$ .

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$  ( $e$ 为自然对数的底数).

(1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2)设 $g(x) = f(x) + 3x + 1$ ,当 $x_1 + x_2 \geq 0$ ,求证: $g(x_1) + g(x_2) \geq 4$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线



自主选拔在线  
微信号: zizzsw



自主选拔在线  
微信号: zizzsw



自主选拔在线  
微信号: zizzsw