

铁人中学 2020 级高三学年第二次模拟考试

数学试题

试题说明：1.本试题满分 150 分，答题时间 120 分钟；

2.请将答案填写在答题卡上，考试结束后只交答题卡。

第 I 卷(选择题 60 分)

一. 单项选择题(本大题包括 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确选项填涂在答题卡上)

1. 已知复数 $z = 1 + 2i$ ，则 $\frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z} - 4} = (\quad)$

- A. $1 + 2i$ B. $1 - 2i$ C. $-1 + 2i$ D. $-1 - 2i$

2. 已知集合 $A = \{x | ax - 1 = 0\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{N}^* | 1 \leq x < 4\}$ ，且 $A \cup B = B$ ，则实数 a 的所有值构成的集合是 ()

- A. $\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ C. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ D. $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

3. 2023 年 3 月 24 日是第 28 个“世界防治结核病日”，我国的宣传主题是“你我共同努力，终结结核流行”，呼吁社会各界广泛参与，共同终结结核流行，维护人民群众的身体健康。已知某种传染疾病的患病率为 5% 通过验血诊断该病的误诊率为 2%，即非患者中有 2% 的人诊断为阳性，患者中有 2% 的人诊断为阴性。随机抽取一人进行验血，则其诊断结果为阳性的概率为 ()

- A. 0.46 B. 0.046 C. 0.68 D. 0.068

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ ，若 $f(2a-1) - 1 \leq 0$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{e+1}{2}, +\infty\right)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \left[0, \frac{e+1}{2}\right]$
C. $\left[0, \frac{e+1}{2}\right]$ D. $(-\infty, \frac{e+1}{2}]$

5. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，点 $M(x_0, 2\sqrt{2})(x_0 > \frac{p}{2})$ 是抛物线 C 上一点，以点 M 为圆心的圆与直线 $x = \frac{p}{2}$ 交于 E, G 两点. 若 $\sin \angle MFG = \frac{1}{3}$ ，则抛物线 C 的方程是 ()

- A. $y^2 = x$ B. $y^2 = 2x$ C. $y^2 = 4x$ D. $y^2 = 8x$

6. 古希腊亚历山大时期的数学家帕普斯在《数学汇编》第3卷中记载着一个确定重心的定理：“如果同一平面内的一个闭合图形的内部与一条直线不相交，那么该闭合图形围绕这条直线旋转一周所得到的旋转体的体积等于闭合图形面积乘以该闭合图形的重心旋转所得周长的积”，即 $V = sI$ (V 表示平面图形绕旋转轴旋转的体积， s 表示平面图形的面积， I 表示重心绕旋转轴旋转一周的周长). 如图直角梯形 $ABCD$ ，已知

$AD \parallel BC, AB \perp AD, AD = 4, BC = 2$ ，则重心 G 到 AB 的距离为 ()

- A. $\frac{14}{9}$ B. $\frac{4}{3}$
C. 3 D. 2

7. 已知 $0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi, 0 < \gamma < \pi$ ，则 “ $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma$ ” 是 “ α, β, γ 为某斜三角形的三个内角” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 黎曼函数是一个特殊的函数，由德国著名的数学家波恩哈德·黎曼发现提出，在高等数学中有着广泛的应用. 其定义黎曼函数 $R(x)$ 为：当 $x = \frac{q}{p}$ (p, q 为正整数， $\frac{q}{p}$ 是既约真分数) 时 $R(x) = \frac{1}{p}$ ，当 $x = 0$ 或 $x = 1$ 或 x 为 $[0, 1]$ 上的无理数时 $R(x) = 0$. 已知 $a, b, a+b$ 都是区间 $[0, 1]$ 内的实数，则下列不等式一定正确的是 ()

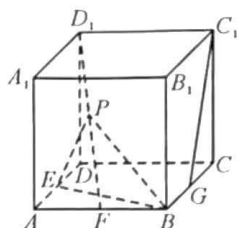
- A. $R(a+b) \geq R(a) + R(b)$ B. $R(a \cdot b) \geq R(a) \cdot R(b)$
C. $R(a+b) \leq R(a) + R(b)$ D. $R(a \cdot b) \leq R(a) \cdot R(b)$

二. 多项选择题(本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分)

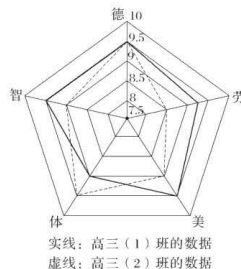
9. 构建德智体美劳全面培养的教育体系是我国教育一直以来努力的方向. 某中学积极响应党的号召，开展各项有益于德智体美劳全面发展的活动，如图所示的是该校高三(1)、(2)班两个班级在某次活动中的德智体美劳的评价得分对照图(得分越高，说明该项教育越好). 下列说法错误的是 ()

- A. 高三(2)班五项评价得分的极差为1.5
B. 除体育外，高三(1)班的各项评价得分均高于高三(2)班对应的得分
C. 高三(1)班五项评价得分的平均数比高三(2)班五项评价得分的平均数要高

D. 各项评价得分中, 这两个班的体育得分相差最大



(第9题图)



(第10题图)

10. 如上图, 在棱长为4的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为棱 AD, AB, BC 的中点, 点 P 为线段 D_1F 上的动点, 则 ()

- A. 两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 45° B. 存在点 P , 使得 $C_1G \parallel$ 平面 BEP
- C. 对任意点 P , 平面 $FCC_1 \perp$ 平面 BEP D. 点 B_1 到直线 D_1F 的距离为4

11. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x (0 < \omega < 3)$ 满足 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -f(x)$, 其图象向右平移 $s (s \in \mathbb{N}^*)$ 个单位后得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 且 $y = g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减, 则 ()

- A. $\omega = 1$ B. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 对称
- C. s 可以等于5 D. s 的最小值为2

12. 已知 $\frac{1 + \ln a}{a} = \frac{e^{1-b}}{b} = \frac{ec-1}{c} > 0$, 则 ()

- A. $a \geq b$ B. $b \geq c$ C. $a \geq c$ D. $2b \geq a + c$

第II卷(非选择题 90分)

三. 填空题(本大题包括4小题, 每小题5分, 共20分, 把正确答案填在答题卡中的横线上)

13. 已知 $\vec{a} = (4, 2)$, $\vec{b} = (1, 1)$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影向量的坐标为 _____.

14. 已知二项式 $(2x - a)^n$ 的展开式中只有第4项的二项式系数最大, 且展开式中 x^3 项的系数为20, 则实数 a 的值

为_____.

15. 冰雹猜想是指：一个正整数 x ，如果是奇数就乘以 3 再加 1，如果是偶数就析出偶数因数 2^n ，这样经过若干次，最终回到 1. 问题提出八十多年来，许多专业数学家前仆后继，依然无法解决这个问题. 已知正整数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1, & \frac{a_n}{2} \notin \mathbb{N}^*, \\ \frac{a_n}{2}, & \frac{a_n}{2} \in \mathbb{N}^*, \end{cases} \quad \text{若存在首项 } a_1 < 50, \text{ 使得 } a_{10} = 1, \text{ 已知 } a_i \neq 1 (i = 1, 2, \dots, 9), \text{ 则 } a_1 = \text{_____}. \quad (\text{写}$$

出一个满足条件的值即可)

16. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，点 P 在第一象限内， $|PF_2| = a$. G 为 $\triangle PF_1F_2$ 重心，且满足 $\overrightarrow{GF_1} \cdot \overrightarrow{F_1P} = \overrightarrow{GF_1} \cdot \overrightarrow{F_1F_2}$ ，线段 PF_2 交椭圆 C 于点 M ，若 $\overrightarrow{F_2M} = 4\overrightarrow{MP}$ ，则椭圆 C 的离心率为_____.

四. 解答题(本大题包括 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

17. (本小题 10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，_____， $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ ，当 $n \in [2^{k-1}, 2^k)$ 时， $b_n = a_k$ ， $k \in \mathbb{N}^*$. 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_{40} .

在下面三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

$$\textcircled{1} \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = n; \quad \textcircled{2} S_n = 2a_n - 2; \quad \textcircled{3} a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$$

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. (本小题 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边，

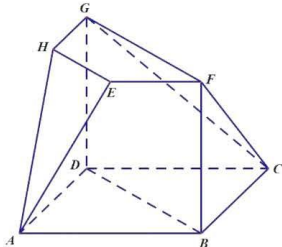
$$\text{且 } \frac{b}{\sin A + \sin C} = \frac{a - c}{\sin B - \sin C}.$$

(1) 求角 A 的大小;

(2) 记 $\triangle ABC$ 的面积为 S ，若 $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$ ，求 $\frac{|\overrightarrow{AM}|^2}{S}$ 的最小值.

19. (本小题 12 分) 如图所示的几何体为一个正四棱柱被两个平面 AEH 与 CFG 所截后剩余部分，且满足 $BD \parallel$ 平面 AEH ， $FG \parallel BD$ ， $FG = BD = 2\sqrt{2}$ ， $AB = 2GH$.

- (1) 当 BF 多长时, $AE \perp CG$, 证明你的结论;
 (2) 当 $AE \perp CG$ 时, 求平面 AEH 与平面 CFG 所成角的余弦值.



20. (本小题 12 分) 习近平总书记在党的二十大报告的开篇部分开宗明义地指出, “大会的主题是: 高举中国特色社会主义伟大旗帜, 全面贯彻新时代中国特色社会主义思想, 弘扬伟大建党精神, 自信自强、守正创新, 踔厉奋发、勇毅前行, 为全面建设社会主义现代化国家、全面推进中华民族伟大复兴而团结奋斗”. 为深入贯彻落实党的二十大精神, 某单位党支部组织党员参加党的二十大主题知识答题竞赛活动, 每位参赛者答题若干次, 答题赋分方法如下: 第 1 次答题, 答对得 20 分, 答错得 10 分; 从第 2 次答题开始, 答对则获得上一次答题得分的两倍, 答错得 10 分. 党员甲参加答题竞赛, 每次答对的概率为 $\frac{3}{4}$, 各次答题结果互不影响.

- (1) 求甲前 3 次答题得分之和为 40 分的概率;
 (2) 记甲第 i 次答题所得分数 $X_i (i \in \mathbb{N}^+)$ 的数学期望为 $E(X_i)$.
 ①写出 $E(X_i)$ 与 $E(X_{i-1})$ 满足的等量关系式 (直接写出结果, 不必证明);
 ②若 $E(X_i) > 100$, 求 i 的最小值.

21. (本小题 12 分) 双曲线具有这样的性质: 若 $P(x_0, y_0)$ 为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上任意一点, 则

双曲线在点 P 处的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, 并且经过点 $(\sqrt{2}, 2)$.

(1) 求双曲线 E 的方程;

(2) 若直线 l 经过点 $(2, 0)$, 与双曲线右支交于 P, Q 两点 (其中点 P 在第一象限), 点 Q 关于原点的对称点为 A , 点 Q 关于 y 轴的对称点为 B , 且直线 AP 与 BQ 交于点 M , 直线 AB 与 PQ 交于点 N . 证明: 双曲线在点 P 处的切线平分线段 MN .

22. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{e^{ax}}, x \in (0, \pi)$

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $1 < a < 1 + \sqrt{2}$, 设直线 l 为 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$ 处的切线, 且 l 与 $y = f(x)$ 的图象在 $(0, \pi)$ 内有两个不同公共点, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

