百校联盟 2020 届 TOP20 九月联考

理科数学　　参考答案

本试卷防伪处为：

她们分别是中国古代的四大美女

则公司将回收该款游戏进行改进

1. B 【解析】依题意，$A=\{x|x^2-4x-12<0\}=\{x|-2<x<6\}$，$B=\{y|y=\sqrt{x}+2\}=\{y|y\geqslant 2\}$，故 $A\cap B=[2,6)$.

2. D 【解析】$\frac{3-2i}{2+9i}=\frac{(3-2i)(2-9i)}{(2+9i)(2-9i)}=\frac{6-27i-4i-18}{85}=-\frac{12}{85}-\frac{31}{85}i$.

3. A 【解析】依题意，$a=\log_3 15=\log_3 3+\log_3 5=1+\log_3 5$，$b=\log_4 20=\log_4 4+\log_4 5=1+\log_4 5$，$c=\log_6 30=\log_6 6+\log_6 5=1+\log_6 5$；因为 $\log_3 5>\log_4 5>\log_6 5$，故 $a>b>c$.

4. B 【解析】依题意，所有的扮演情况为 $A_4^4=24$ 种，其中甲不扮演貂蝉且乙不扮演杨贵妃的情况为 $A_3^3+2A_2^2A_2^2=14$ 种，故所求概率 $P=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$.

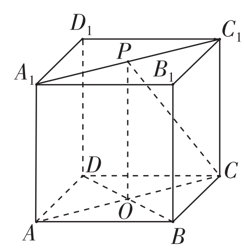
5. A 【解析】依题意，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域关于原点对称，且 $f(-x)=\frac{e^{|-x|}}{(-x)^3}+\sin(-x)=-(\frac{e^{|x|}}{x^3}+\sin x)=-f(x)$，故函数 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，排除 C；而当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，排除 D；$f(\frac{3\pi}{4})=\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{(\frac{3\pi}{4})^3}+\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，排除 B.

6. C 【解析】$(2x^2-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}})^7$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_7^r\cdot(2x^2)^{7-r}\cdot(-x^{-\frac{4}{3}})^r=C_7^r\cdot 2^{7-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{14-\frac{10}{3}r}$，令 $14-\frac{10}{3}r=4$，解得 $r=3$，故所求系数为 $C_7^3\cdot 2^4\cdot(-1)^3=-35\times16=-560$.

7. B 【解析】$\overrightarrow{AB}=(2,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(7,1)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\neq 0$，故①错；则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=\sqrt{85}$，故④正确；$\overrightarrow{AB}=(2,-3)$，$\overrightarrow{DC}=(2,-3)$，故 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，且 A,B,C,D 四点不共线，则四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故②正确；$\overrightarrow{AC}=(7,1)$，$\overrightarrow{BD}=(3,7)$，则 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\frac{14\sqrt{29}}{145}$，故③错. 故正确结论的序号为②④.

8. A 【解析】该程序必须输出的是方程组 $\begin{cases}5x+45=y\\y=3+7x\end{cases}$ 的解，则 $x=21$，观察可知，故选 A.

9. A 【解析】易知 $AB=2\sqrt{2}$；连接 C_1P，在直角 $\triangle CC_1P$ 中，可计算 $C_1P=\sqrt{CP^2-CC_1^2}=2$；又 $A_1P=2$，$A_1C_1=4$，所以点 P 是 A_1C_1 的中点；连接 AC 与 BD 交于点 O，易证 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1，直线 CP 在平面 BDD_1B_1 内的射影是 OP，所以 $\angle CPO$ 就是直线 CP 与平面 BDD_1B_1 所成的角，在直角 $\triangle CPO$ 中，$\tan\angle CPO=\frac{CO}{PO}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

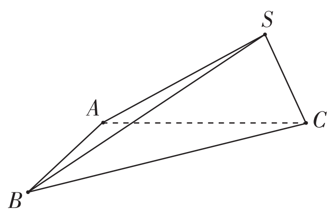


10. B 【解析】设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{2}=1,\\\frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{2}=1,\end{cases}$ 两式相减可得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{8}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{2}=0$，则 $k_{OA}\cdot k_{MN}=-\frac{1}{4}$；因为 $|OA|=|AF_2|$，故 $k_{OA}=-k_{MN}$，解得 $k_{MN}=\pm\frac{1}{2}$，故直线 l 的斜率为 $\pm\frac{1}{2}$.

11. B 【解析】依题意，$f(-x)=|\sin\frac{(-x)}{2}|+|\cos\frac{(-x)}{2}|=|\sin\frac{x}{2}|+|\cos\frac{x}{2}|=f(x)$，故函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故①错误；因为 $f(x+\pi)=|\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})|+|\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})|=|\cos\frac{x}{2}|+|\sin\frac{x}{2}|=f(x)$，故 $x=\pi$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期，且当 $x\in[0,\pi)$ 时，$f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=$

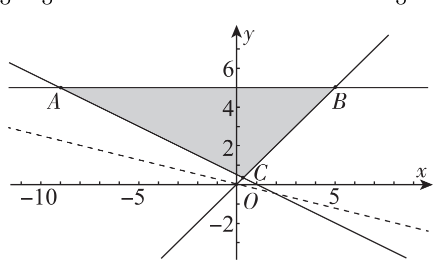
$\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\in[1,\sqrt{2}]$，故②正确，③错误.

12. C 【解析】如图所示，$AC=4$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{5}$，故 $AB\perp AC$，而平面 $ABC\perp$ 平面 SAC，故 $AB\perp$ 平面 SAC，故 $AB\perp SC$，而 $AS\perp SC$，故 $SC\perp$ 平面 ABS，则 $SC\perp SB$；设 $AS=x$，则 $BS^2=AB^2+AS^2=4+x^2$，而 $SC^2=AC^2-AS^2=16-x^2$，则 $S_{\triangle CBS}=\frac{1}{2}SB\cdot SC=\frac{1}{2}\times\sqrt{16-x^2}\times\sqrt{4+x^2}=\frac{\sqrt{(16-x^2)(4+x^2)}}{2}$，当且仅当 $x^2=6$，即 $x=\sqrt{6}$ 时，$\triangle CBS$ 的面积最大，此时 $S_{\triangle ABC}=4$，$S_{\triangle ABS}=\sqrt{6}$，$S_{\triangle SAC}=\sqrt{15}$，$S_{\triangle SBC}=5$，设三棱锥 $S-ABC$ 内切球的半径为 r，故 $V_{S-ABC}=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle SAC}+S_{\triangle ABS}+S_{\triangle SBC})\cdot r$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times4=\frac{1}{3}(4+5+\sqrt{6}+\sqrt{15})\cdot r$，即 $r=\frac{2\sqrt{15}}{9+\sqrt{6}+\sqrt{15}}\approx0.5$.



13. $y=\frac{13}{4}x-\frac{7}{4}$ 【解析】依题意，$f'(x)=\frac{1-\ln(2x)}{x^2}-3x^2$，故 $f'(\frac{1}{2})=4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$，而 $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$，故所求切线方程为 $y+\frac{1}{8}=\frac{13}{4}(x-\frac{1}{2})$，即 $y=\frac{13}{4}x-\frac{7}{4}$.

14. $\frac{5}{3}$ 【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图中阴影部分所示；观察可知，当 $z=x+4y$ 过点 C 时，z 有最小值；联立 $\begin{cases}x+2y=1,\\x-y=0,\end{cases}$ 解得 $x=y=\frac{1}{3}$，即 $C(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，故 $z=x+4y$ 的最小值为 $\frac{5}{3}$.



15. 0.84 【解析】依题意，$\xi\sim N(9,4^2)$，其中 $\mu=9$，$\sigma=4$，故 $P(-3<\xi\leqslant13)=P(\mu-3\sigma<\xi\leqslant\mu+\sigma)=\frac{0.6827+0.9973}{2}=0.84$.

16. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 【解析】不妨设点 M 在第一象限，设 $|MF_1|=m$，$|MF_2|=n$，则 $m=2b+n$，而 $MF_1\perp MF_2$，故 $m^2+n^2=4c^2$，联立两式可得，$mn=2c^2-2b^2$，联立 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\x^2+y^2=c^2,\end{cases}$ 可得 $M(a,b)$，由三角形的面积公式可得 $\frac{1}{2}mn=\frac{1}{2}\cdot2cb$，即 $c^2-b^2=cb$，故 $a^2=bc$，即 $a^4=b^2c^2$，故 $a^4=b^2(a^2+b^2)$，故 $b^4+a^2b^2-a^4=0$，则 $(\frac{b}{a})^4+(\frac{b}{a})^2-1=0$，解得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

17.【解析】(1)依题意，$2S_n=(1-\frac{1}{3^n})a_{n+1}$，

$2S_{n+1}=(1-\frac{1}{3^{n+1}})a_{n+2}$， ………………… 1 分

两式相减可得，$(1-\frac{1}{3^{n+1}})(a_{n+2}-3a_{n+1})=0$，

故 $a_{n+2}=3a_{n+1}$，……………………………… 3 分

而 $2S_1=\frac{2}{3}a_2$，故 $a_2=3a_1$， ………………… 4 分

故数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列；

……………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知 $a_n=3^{n-1}$，$b_n=(-1)^n\cdot(\log_9a_n)^2=(-1)^n\cdot(\log_93^{n-1})^2=\frac{1}{4}\cdot(-1)^n\cdot(n-1)^2$，…

……………………………………………… 7 分

故 $b_{2n-1}+b_{2n}=\frac{1}{4}\cdot[(-1)^{2n-1}\cdot(2n-2)^2+(-1)^{2n}\cdot(2n-1)^2]=\frac{1}{4}(4n-3)$，………… 8 分

记数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 T_{2n}，

则 $T_{2n}=\frac{1}{4}(1+5+9+\cdots+4n-3)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{4}n$.

……………………………………………… 10 分

18.【解析】依题意，$\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cos A}=2c^2-bc$，则 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=(2c-b)\cos A$，………………… 2 分

即 $a\cos B=(2c-b)\cos A$，故 $\sin A\cos B=(2\sin C-\sin B)\cos A$， ……………………………… 4 分

故 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$，

即 $\sin(A+B)=\sin C=2\sin C\cos A$，

而 $C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq0$，故 $\cos A=\frac{1}{2}$，故 $A=\frac{\pi}{3}$；

……………………………………………… 6 分

(2)因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AM\cdot BC=\frac{1}{2}bc\sin A$；………

……………………………………………… 7 分

因为 $BC=12, A=\frac{\pi}{3}$，故 $6AM=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，

故 $AM=\frac{\sqrt{3}}{24}bc$；…………………………… 9 分

由余弦定理，$144=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc$
$\geqslant 2bc-bc=bc$，…………………………… 11 分

当且仅当 $b=c$ 时等号成立，故 $0<bc\leqslant 144$，

则 $0<AM\leqslant 6\sqrt{3}$，

故 AM 的取值范围为 $(0,6\sqrt{3}]$. …………… 12 分

19.【解析】(1)证明：∵ $BC\perp PD, BC\perp DC$，

∴ $BC\perp$ 平面 PDC，…………………………… 1 分

∴ $AD\perp$ 平面 PDC，∴ $PC\perp AD$，…………… 2 分

又 $\angle PDC=\angle PCD, \angle CPB=\angle CBP$，

$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，

在 $\triangle PDC$ 中，设 $PC=PD=2$，

则 $DC=AB=2\sqrt{2}$，故 $PC^2+PD^2=DC^2$，

∴ $PC\perp PD$，∵ $AD\cap PD=D$，∴ $PC\perp$ 平面 PAD；
…………………………………………………… 4 分

而 $PA\subset$ 平面 PAD，故 $PC\perp PA$；………… 5 分

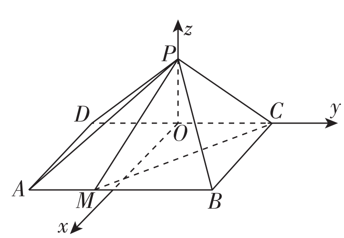
(2)作 $PO\perp CD$ 于 O，

因为 $BC\perp$ 平面 PDC，

所以平面 $ABCD\perp$ 平面 PDC，

故 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

以点 O 为原点，建立如图所示空间直角坐标系，
…………………………………………………… 6 分



设 $PC=PD=2$，

则 $P(0,0,\sqrt{2})$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$A(2,-\sqrt{2},0)$，
$B(2,\sqrt{2},0)$，$M(2,-\frac{\sqrt{2}}{3},0)$，

$\overrightarrow{PC}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CM}=(2,-\frac{4\sqrt{2}}{3},0)$，$\overrightarrow{CB}=$
$(2,0,0)$，…………………………………… 8 分

设平面 PMC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0\\ 2x-\frac{4\sqrt{2}}{3}y=0\end{cases},$$

∴不妨取 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{2},3,3)$，

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}b-\sqrt{2}c=0,\\ 2a=0,\end{cases}$$

∴不妨取 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$，…………………… 10 分

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{6}{\sqrt{18+8}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，

而二面角 $M-PC-B$ 为锐角，故二面角 $M-PC-B$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. …………… 12 分

20.【解析】(1)设抛物线 C 的准线为 l'，过点 M 作 $MM'\perp l'$，垂足为 M'，

过点 N 作 $NN'\perp l'$，垂足为 N'，…………… 1 分

则 $|MN|+|MF|=|MN|+|MM'|\geqslant|NN'|$
$=\frac{7}{2}$，

即 $|MN|+|MF|$ 的最小值为 $\frac{7}{2}$；…………… 4 分

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+b$，$P(x_1,y_1)$，
$Q(x_2,y_2)$；

将直线 l 与抛物线 C 的方程联立得 $\begin{cases}y=kx+b\\ y^2=-2x\end{cases}$，

$k^2x^2+(2kb+2)x+b^2=0$，…………………… 6 分

$x_1+x_2=\frac{-2kb-2}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{b^2}{k^2}$ ①，

又 $k_{MP}+k_{MQ}=\frac{y_1-2}{x_1+2}+\frac{y_2-2}{x_2+2}=-2$，……… 7 分

即 $(kx_1+b-2)(x_2+2)+(kx_2+b-2)(x_1+2)=$
$-2(x_1+2)(x_2+2)$，

$2kx_1x_2+2k(x_1+x_2)+b(x_1+x_2)-2(x_1+x_2)+$
$4b-8=-2x_1x_2-4(x_1+x_2)-8$，

将①代入得，$b^2-b-2-2k(b+1)=0$，

即 $(b+1)(b-2-2k)=0$，得 $b=-1$ 或 $b=2+2k$，
…………………………………………… 9 分

当 $b=-1$ 时，直线 l 为 $y=kx-1$，此时直线恒过
$(0,-1)$；…………………………………… 10 分

当 $b=2+2k$ 时，直线 l 为 $y=kx+2k+2=k(x+$
$2)+2$，此时直线恒过 $M(-2,2)$(舍去)；

综上所述，直线 l 过定点 $(0,-1)$. ………… 12 分

21.【解析】(1)依题意，$f'(x)=\frac{2}{x}+a=\frac{2+ax}{x}$，……
…………………………………………… 1 分

若 $a=0$，则 $f'(x)=\frac{2}{x}>0$，

故函数 $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递增；…… 2 分

若 $a\neq 0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{2}{a}$；

若 $a>0$，则 $-\frac{2}{a}<0$，则 $f'(x)>0$，

函数 $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递增；……… 3 分

若 $a\leqslant -\frac{1}{2}$，则 $-\frac{2}{a}\leqslant 4$，则 $f'(x)\leqslant 0$，

则函数 $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递减； …… 4 分

若 $-\frac{1}{2}<a<0$，则 $-\frac{2}{a}>4$，则函数 $f(x)$ 在 $[4,-\frac{2}{a})$ 上单调递增，在 $(-\frac{2}{a},+\infty)$ 上单调递减；

综上所述，$a\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递增，$a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递减，$-\frac{1}{2}<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[4,-\frac{2}{a})$ 上单调递增，在 $(-\frac{2}{a},+\infty)$ 上单调递减；………… 5 分

(2)依题意，$x^2+1-4\ln x-2ax\geqslant 0$，而 $g'(x)=2x-\frac{4}{x}-2a=\frac{2(x^2-ax-2)}{x}$，…………………… 6 分

令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+8}}{2}$；

因为 $a>0$，故 $\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}>1$，

故 $g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点 $x_0=\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}$；……………………………………… 7 分

又 $g'(x)=2(-\frac{2}{x}+x-a)$，

故 $-\frac{2}{x_0}+x_0-a=0$①，

要使 $g(x)\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，且 $g(x)=0$ 有唯一解，

只需 $g(x_0)=0$，

即 $-2\ln x_0+\frac{1}{2}(x_0^2+1)-ax_0=0$②， ……… 8 分

由①②可知，$-2\ln x_0+\frac{1}{2}(x_0^2+1)-x_0(-\frac{2}{x_0}+x_0)=0$，

故 $-2\ln x_0-\frac{1}{2}x_0^2+\frac{5}{2}=0$，…………………… 10 分

令 $h(x_0)=-2\ln x_0-\frac{1}{2}x_0^2+\frac{5}{2}$，

显然 $h(x_0)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

因为 $h(1)=2>0$，$h(2)=-2\ln 2+\frac{1}{2}<0$，

故 $1<x_0<2$，

又 $a=-\frac{2}{x_0}+x_0$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故必有 $a<1$. ……………………………… 12 分

22.【解析】(1)依题意，$(0.005+a+b+0.035+0.028)\times 10=1$，故 $a+b=0.032$；

而 $a-b=0.016$，联立两式解得，$a=0.024$，$b=0.008$；……………………………………… 2 分

所求平均数为 $55\times 0.05+65\times 0.24+75\times 0.35+85\times 0.28+95\times 0.08$

$=2.75+15.6+26.25+23.8+7.6=76$；……………………………………………………… 4 分

(2)(ⅰ)因为一款游戏初测被认定需要改进的概率为 $C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3$， …………………… 5 分

一款游戏二测被认定需要改进的概率为 $C_3^1p(1-p)^2[1-(1-p)^2]$， ……………………… 6 分

所以某款游戏被认定需要改进的概率为：

$C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3+C_3^1p(1-p)^2[1-(1-p)^2]$

$=3p^2(1-p)+p^3+3p(1-p)^2[1-(1-p)^2]$

$=-3p^5+12p^4-17p^3+9p^2$；……………… 7 分

(ⅱ)设每款游戏的评测费用为 X 元，则 X 的可能取值为 900，1500；

$P(X=1500)=C_3^1p(1-p)^2$，

$P(X=900)=1-C_3^1p(1-p)^2$， …………… 8 分

故 $E(X)=900\times[1-C_3^1p(1-p)^2]+1500\times C_3^1p(1-p)^2=900+1800p(1-p)^2$； ……… 9 分

令 $g(p)=p(1-p)^2$，$p\in(0,1)$，

$g'(p)=(1-p)^2-2p(1-p)=(3p-1)(p-1)$.

当 $p\in(0,\frac{1}{3})$ 时，$g'(p)>0$，$g(p)$ 在 $(0,\frac{1}{3})$ 上单调递增，

当 $p\in(\frac{1}{3},1)$ 时，$g'(p)<0$，$g(p)$ 在 $(\frac{1}{3},1)$ 上单调递减，

所以 $g(p)$ 的最大值为 $g(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$. ……… 11 分

所以实施此方案，最高费用为 $50+600\times(900+1800\times\frac{4}{27})\times 10^{-4}=50+54+16=120>110$，

故所需的最高费用将超过预算. ………… 12 分