2023 届高三二轮复习联考(二)

数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$,根据集合元素的性质,则有 $a+3=5$,得 $a=2$.故选 C.

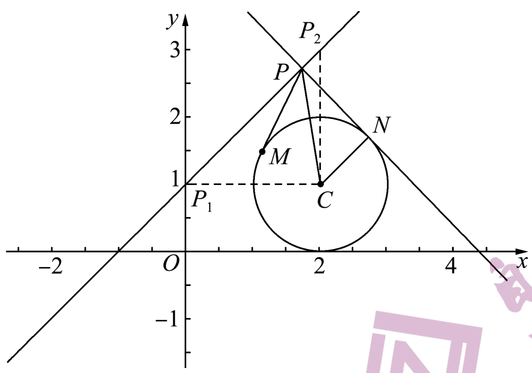
2.A 【解析】$(1+\mathrm{i})(m-2\mathrm{i})=m-2\mathrm{i}+m\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=m+2+(m-2)\mathrm{i}$,因为复数在复平面内对应的点在第一象限,所以 $\begin{cases}m+2>0,\\ m-2>0,\end{cases}$ 解得 $m>2$.故选 A.

3.B 【解析】当 $a+1>b-2$ 时,取 $a=1,b=2$,则 $a<b$,所以"$a+1>b-2$"不是"$a>b$"的充分条件;当 $a>b$ 时,得 $a+1>b+1>b-2$,所以"$a+1>b-2$"是"$a>b$"的必要条件,所以"$a+1>b-2$"是"$a>b$"的必要不充分条件.故选 B.

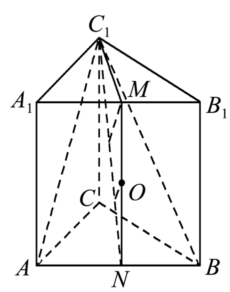
4.C 【解析】$a_2=\dfrac{a_1}{2a_1+1}=\dfrac{1}{3}$,$a_3=\dfrac{a_2}{2a_2+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+1}=\dfrac{1}{5}$,$a_4=\dfrac{a_3}{2a_3+1}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+1}=\dfrac{1}{7}$,$a_5=\dfrac{a_4}{2a_4+1}=\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{7}+1}=\dfrac{1}{9}$.故选 C.

5.D 【解析】因为 $f(-x)=\cos(-2x)+|\sin(-x)|=\cos 2x+|\sin x|=f(x)$,所以 $f(x)$是偶函数,故 A 错误;因为 $\cos 2x$,$|\sin x|$的最小正周期均为 π,所以 $f(x)$的最小正周期为 π,故 B 错误;因为 $f(x)=\cos 2x+|\sin x|=1-2\sin^2 x+|\sin x|=-2t^2+t+1(t=|\sin x|\in[0,1])=-2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}$,当 $t=\dfrac{1}{4}$时,$f(x)$取得最大值,最大值为$\dfrac{9}{8}$,故 C 错误;当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$时,$t=|\sin x|=\sin x\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,且 t 关于 x 单调递增,y 关于 t 在$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$上单调递减,所以 $f(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减,故 D 正确.故选 D.

6.C 【解析】在圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 上存在两点 M,N,使得$\angle MPN=60^\circ$,即要保证过点 P 的圆 C 的两条切线的夹角大于等于 60°,也即$\angle MPC\geqslant 30^\circ$,因此点 P 与圆心 C 的距离要小于等于 2,如图,已知当点 P 的横坐标为 0 或 2 时,$|PC|$恰好为 2,因此点 P 的横坐标的取值范围为$[0,2]$.故选 C.



7.C 【解析】易知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心为侧面 ABB_1A_1 的中心 O,外接球半径等于正方形 ABB_1A_1 对角线的一半,$R=2\sqrt{2}$,球心 O 到平面 ABC_1 的距离等于 A_1B_1 的中点 M 到平面 ABC_1 的距离的一半,而由等面积法可求得 M 到平面 ABC_1 的距离 $h_M=\dfrac{C_1M\cdot MN}{C_1N}=\dfrac{2\times 4}{\sqrt{C_1M^2+MN^2}}=\dfrac{8}{2\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$,故球心 O 到平面 ABC_1 的距离 $h_o=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,因此,平面 ABC_1 截三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球所得截面的半径 $r=\sqrt{R^2-h_o^2}=\sqrt{8-\dfrac{4}{5}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$,其面积等于$\dfrac{36}{5}\pi$.故选 C.



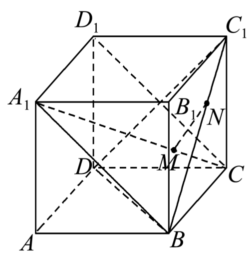
8.A 【解析】设 $g(x)=f(x)-\sin x$,$\because f(x)-f(-x)=2\sin x$,即 $f(-x)=f(x)-2\sin x$,$\therefore g(-x)=f(-x)-\sin(-x)=f(x)-2\sin x+\sin x=f(x)-\sin x=g(x)$,故函数 $g(x)$是偶函数.$\because$在$[0,+\infty)$上有 $f'(x)>\cos x$,$\therefore g'(x)=f'(x)-\cos x>0$,故 $g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,根据偶函数的对称性可知,$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,由 $f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)-f(t)>\cos t-\sin t$ 得 $f(t)-\sin t<f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)-\cos t=f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$,即 $g(t)<g\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$,$\therefore |t|<\left|\dfrac{\pi}{2}-t\right|$,即 $t^2<\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)^2$,解得 $t<\dfrac{\pi}{4}$.故选 A.

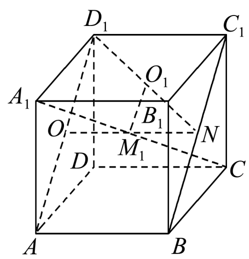
9.ABD 【解析】对于选项 A,因为 $9\times 70\%=0.63$,所以该射击运动员这组射击训练数据的 70%分位数为该组数据由小到大排列后

的第七个数 10.3.故选项 A 正确;对于选项 B,因为 $E(X)=np=20$,$D(2X)=4D(X)=4np(1-p)=60$,所以 $1-p=\frac{3}{4}$,解得 $p=\frac{1}{4}$,故选项 B 正确;对于选项 C,如果两个变量的相关性越强,则 $|r|$ 就越接近于 1,故 C 不正确;对于选项 D,由 $y=ae^{bx}+c$ 得,$y-c=ae^{bx}$,所以 $\ln(y-c)=\ln(ae^{bx})=\ln a+\ln e^{bx}=bx+\ln a$,又因为所得到经验回归方程为 $z=0.8x+3$,所以 $\ln a=3$,解得 $a=e^3$.故选项 D 正确.故选 ABD.

10.BD 【解析】因为 $\frac{e^3+e^5}{e^3\cdot e^5}=\frac{1}{e^5}+\frac{1}{e^3}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$,所以 $e^3+e^5<e^3\cdot e^5$,故 A 错误;因为 $0<\lg 3<1$,$0<\lg 5<1$,所以 $\lg 3\cdot\lg 5<\lg 5<\lg 3+\lg 5$,故 B 正确;因为 $3^{\pi}\cdot 5^{\pi}=(3\times 5)^{\pi}>(2\times 6)^{\pi}$,$\frac{2^{\pi}+6^{\pi}}{(2\times 6)^{\pi}}=\frac{1}{2^{\pi}}+\frac{1}{6^{\pi}}<1$,所以 $3^{\pi}\cdot 5^{\pi}>(2\times 6)^{\pi}>2^{\pi}+6^{\pi}$,故 C 错误;因为 $\frac{\log_3 10+\log_5 10}{\log_3 10\cdot\log_5 10}=\frac{1}{\log_5 10}+\frac{1}{\log_3 10}=\lg 5+\lg 3=\lg 15>1$,所以 $\log_3 10+\log_5 10>\log_3 10\cdot\log_5 10$,故 D 正确.故选 BD.

11.BD 【解析】因为 $D_1N\cap$ 平面 $BCD_1A_1=D_1$,且 $BM\subset$ 平面 BCD_1A_1,所以不存在 $\lambda,\mu\in(0,1)$,使得 $BM/\!/D_1N$,故 A 错误;记 $A_1C\cap$ 平面 $BDC_1=M$,在平面 BDC_1 中,过点 M 作直线 $MN/\!/C_1D$,交直线 BC_1 于点 N,在正方体中易得 $C_1D\perp$ 平面 BA_1C,所以此时 $MN\perp$ 平面 BA_1C,故 B 正确;当 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时,M,N 分别为 A_1C,BC_1 的中点,易得 $MN/\!/D_1C_1$,且直线 D_1C_1 与 A_1C 不垂直,即 MN 不是直线 A_1C 和 BC_1 的公垂线,故 C 错误;当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时,N 为 BC_1 的中点,$D_1N=\sqrt{2^2+2}=\sqrt{6}$,而 A_1C 的中点 M_1 到 D_1N 的中点 O_1 的距离等于 $M_1O_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AD_1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{6}}{2}$,因此以 D_1N 为直径的球与线段 A_1C 必有交点,即存在 $\lambda\in(0,1)$,使得 $\angle D_1MN=90°$,故 D 正确.故选 BD.





12.ABD 【解析】数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$,存在常数 $A=0$,对于任意正数 r,总存在正整数 $N=\left[\frac{1}{r}+1\right]$ (比 $\frac{1}{r}+1$ 小的最大整数),使得 $n>N$ 时,恒有 $|a_n-0|<r$,故 A 正确;若数列 $\{a_n\}$ 为收敛数列,则存在常数 A,对于任意正数 r,总存在正整数 N,使得 $n>N$ 时,恒有 $|a_n-A|<r$,即 $A-r<a_n<A+r$,所以当 $M=\max\{|A+r|,|A-r|,a_1,a_2,\cdots,a_N\}$ 时,对于 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,都有 $|a_n|<M$,故 B 正确;若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为收敛数列,则存在常数 A_1,对于任意正数 $\frac{r}{2}$,总存在正整数 N_1,使得 $n>N_1$ 时,恒有 $|a_n-A_1|<\frac{r}{2}$,存在常数 A_2,对于任意正数 $\frac{r}{2}$,总存在正整数 N_2,使得 $n>N_2$ 时,恒有 $|b_n-A_2|<\frac{r}{2}$,所以存在常数 $A=A_1-A_2$,对于任意的正数,总存在正整数 $N=\max\{N_1,N_2\}$,使得 $n>N$ 时,恒有 $|(a_n-b_n)-(A_1-A_2)|=|(a_n-A_1)-(b_n-A_2)|<|(a_n-A_1)|+|(b_n-A_2)|<r$,故 C 错误;若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为收敛数列,由 B 选项可知,存在 $M_2\in\mathbf{R}^+$,使得 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,都有 $|a_n|<M$,于是有:$|a_nb_n-AB|=|(a_nb_n-Ab_n)+(Ab_n-AB)|\leqslant|b_n|\cdot|a_n-A|+|A|\cdot|b_n-B|<M_2\cdot r+A\cdot r=(M_2+A)\cdot r$ 可以任意小,因此数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 为收敛数列,故 D 正确.故选 ABD.

13.$2x+y-1=0$ 【解析】由 $f(x)=xe^x-3x+1$,得 $f'(x)=(x+1)e^x-3$,$\therefore f'(0)=-2$,则曲线 $f(x)=xe^x-3x+1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是 $y=-2x+1$.故答案为 $2x+y-1=0$.

14.6 【解析】因为 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$,所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$,所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$,$\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\times 6^2-6\times 6\times\frac{1}{2}=6$.故答案为 6.

15. $\frac{5}{12}$ 【解析】甲,乙两名考生选科的总情况有$(C_2^1 \cdot C_4^2)^2=12^2=144$,其中恰有两门选考科目相同的情况有以下两种:(ⅰ)在物理、历史两科中选科相同:$C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot A_3^2=2\times4\times(3\times2)=48$.(ⅱ)在物理、历史两科中选科不同:$A_2^2 \cdot C_4^2=2\times\frac{4\times3}{2\times1}=12$,因此甲,乙两名考生恰有两门选考科目相同的概率为$\frac{48+12}{144}=\frac{60}{144}=\frac{5}{12}$.

16. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ 【解析】依题意可知$|OM|=a$,则$\tan\angle MON=\tan(\pi-\angle MOF)=-\tan\angle MOF=-\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{b}{a}$,所以在Rt$\triangle NMO$中,$|MN|=|OM|\cdot\tan\angle MON=b$,$|ON|=\sqrt{|OM|^2+|MN|^2}=\sqrt{a^2+b^2}=c$,所以$|NF|=2c$.在$\triangle MNF$中,因为$\sin\angle MNF=\sqrt{7}\sin\angle MFN$,由正弦定理得,$|MF|=\sqrt{7}|MN|$,所以$|MF|=\sqrt{7}b$,又因为$\cos\angle MNF=\cos\angle MNO=\frac{|MN|}{|ON|}=\frac{b}{c}$,在$\triangle MNF$中,由余弦定理得,$|MF|^2=|MN|^2+|NF|^2-2|MN|\cdot|NF|\cos\angle MNF$,即$7b^2=b^2+4c^2-2b\cdot2c\cdot\frac{b}{c}$,化简得$5b^2=2c^2$,所以$5(c^2-a^2)=2c^2$,所以$3c^2=5a^2$,所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{3}$,所以$e=\frac{\sqrt{15}}{3}$.故答案为$\frac{\sqrt{15}}{3}$.

17.**解**:(1)由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

所以$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$, ………………………………………… 1分

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,所以$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$, ………………………………………… 2分

所以$\frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{2\sqrt{3}a^2}{2ab\cos C}=\frac{\sqrt{3}a}{b\cos C}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin B\cos C}$.

因为$\frac{\sin A}{\cos B\cos C}=\frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2-c^2}$,

所以$\frac{\sin A}{\cos B\cos C}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin B\cos C}$. ………………………………………… 3分

又因为$A\in(0,\pi)$,所以$\sin A\neq0$,

所以$\frac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}$,即$\tan B=\sqrt{3}$. ………………………………………… 4分

又因为$B\in(0,\pi)$,

所以$B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 5分

(2)因为$B=\frac{\pi}{3}$,所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为$a+c=2\sqrt{6}a\sin C$,

所以$(a+c)\sin B=2\sqrt{6}a\sin C\sin B$,

即$(a+c)\sin B=3\sqrt{2}a\sin$ C. ………………………………………… 6分

由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,所以$b(a+c)=3\sqrt{2}ac$. ………………………………………… 7分

因为$b=3$,所以$a+c=\sqrt{2}ac$.

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac$, ………………………………………… 8分

所以$9=(\sqrt{2}ac)^2-3ac$,即$2(ac)^2-3ac-9=0$,所以$(2ac+3)(ac-3)=0$.

解得$ac=-\frac{3}{2}$(舍去)或$ac=3$. ………………………………………… 9分

所以$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ………………………………………… 10分

18.**解**:(1)当平面$PAE\perp$平面$AECD$时,过P作$PO\perp AE$于O,

因为平面 $PAE\cap$ 平面 $AECD=AE$，$PO\subset$ 平面 PAE，$PO\perp AE$，

所以 $PO\perp$ 平面 $AECD$. ………………………………………………………………………… 1 分

此时四棱锥 $P-AECD$ 的高就是等边三角形 $\triangle PAE$ 的高 PO，

四棱锥 $P-AECD$ 的体积最大，…………………………………………………………………… 3 分

因为 $\triangle ABE$ 是等边三角形，所以 $\angle B=\angle AEB=\angle C=\frac{\pi}{3}$，所以 $AE/\!/CD$，又 $AD=CD$，所以四边形 $AECD$ 是菱形.

四棱锥 $P-AECD$ 体积最大值为：

$V_{P-AECD}=\frac{1}{3}AB\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot S_{AECD}=\frac{1}{3}AB\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot AD\cdot CD\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{4}$. ………………………… 5 分

(2)解法一：由(1)知当平面 $PAE\perp$ 平面 $AECD$ 时，四棱锥 $P-AECD$ 的体积最大，连接 DO，DE.

由条件易知 $\triangle ADE$ 和 $\triangle APE$ 都是等边三角形，………………………………………………… 6 分

则 $AE\perp PO$，$AE\perp DO$，$PO\cap DO=O$，PO，$DO\subset$ 面 PDO，

得 $AE\perp$ 面 PDO，$AE\perp PD$.

又 $CD/\!/AE$，$CD\subset$ 面 PCD，$AE\not\subset$ 面 PCD，

所以 $AE/\!/$ 面 PCD. ……………………………………………………………………………… 7 分

设平面 AEP 与平面 PCD 的交线为 l，则 $l/\!/AE$，

所以 $l\perp PD$，$l\perp PO$. ………………………………………………………………………… 8 分

平面 AEP 与平面 PCD 所成角即为 PD 与 PO 所成角，………………………………………… 9 分

因为 $PO\perp DO$，$PO=DO$，所以 $\triangle PDO$ 为等腰直角三角形，………………………………… 10 分

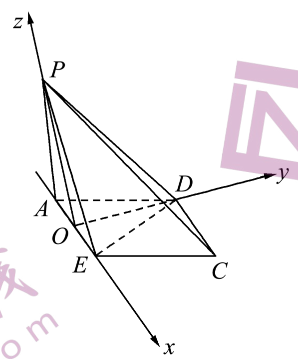
所以 PD 与 PO 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，…………………………………………………………… 11 分

即平面 AEP 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………… 12 分

解法二：由(1)知，当平面 $PAE\perp$ 平面 $AECD$ 时，四棱锥 $P-AECD$ 的体积最大，连接 DO，DE.

由条件易知 $\triangle ADE$ 和 $\triangle APE$ 都是等边三角形，O 是 AE 的中点，

如图，以 AE 中点 O 为原点，OE、OD、OP 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，……………… 6 分



则 $P\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$D\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{PD}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$. ……………… 7 分

设平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PD}=\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=-x=0,\end{cases}$ ………………………………………………………… 8 分

令 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,1)$，……………………………………………………………………… 9 分

取平面 PAE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$，…………………………………………………………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，……………………………………………………… 11 分

即平面 AEP 与平面 PCD 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………………………………… 12 分

19.**解**:(1)当 $n=1$ 时,$4S_1=a_1^2+2a_1-8=4a_1$,即 $a_1^2-2a_1-8=0(a_1>0)$,

得 $a_1=4$ 或 $a_1=-2$(舍去). ………………………………………………………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时,由 $4S_n=a_n^2+2a_n-8$,……①

得 $4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}-8(n\geqslant 2)$,……②

①-②得:$4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$, ………………………………………………………………… 2 分

化简得$(a_n-a_{n-1}-2)(a_n+a_{n-1})=0$. ……………………………………………………………………… 3 分

因为 $a_n>0$,所以 $a_n-a_{n-1}-2=0$,即 $a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$,

即数列$\{a_n\}$是以 4 为首项,2 为公差的等差数列, ………………………………………………………… 4 分

所以 $a_n=2n+2$. ……………………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)存在.

当 $a_{k1}=a_1=4,a_{k2}=a_3=8$ 时,

会得到数列$\{a_n\}$中原次序的一列等比数列 $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{km},\cdots,(k_1=1)$, ……………………………… 6 分

此时的公比 $q=2$,是最小的,证明如下:

$a_{k_1}=a_1=4$,假若 a_{k_2} 取 $a_2=6$,公比为$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$,

则 $a_{k_3}=4\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=9$ 为奇数,不可能在数列$\{a_n\}$中. ………………………………………………… 8 分

由 $a_{km}=2(k_m-1)+4=4\cdot 2^{m-1}=2^{m+1}$, ………………………………………………………………… 9 分

可得:$k_m=2^m-1$, ……………………………………………………………………………………………… 10 分

因此,数列$\{k_n\}$的前 n 项和

$T_n=(2-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^n-1)=(2+2^2+\cdots+2^n)-n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n$. …………………… 12 分

20.**解**:(1)补全统计表如下:

	A 路线		B 路线		合计
	好	一般	好	一般	
男	10	20	55	35	120
女	90	30	20	40	180
合计	100	50	75	75	300

零假设 H_0:对于 A,B 两条路线的选择与性别无关, ……………………………………………………… 1 分

将所给数据整理,得到如下列联表:

性别	路线		合计
	A	B	
男	30	90	120
女	120	60	180
合计	150	150	300

$\chi^2=\frac{300\times(30\times 60-120\times 90)^2}{120\times 180\times 150\times 150}=50>10.828=\chi_{0.001}$ ………………………………………… 3 分

根据小概率值 $\chi=0.001$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,

即认为对 A,B 两条路线的选择与性别有关. …………………………………………………………………… 4 分

(2)设 p_1 为选择 A 路线好评率,$p_1=\frac{100}{150}=\frac{2}{3}$, ……………………………………………………………… 5 分

设 p_2 为选择 B 路线好评率，$p_2=\frac{75}{150}=\frac{1}{2}$，…………………………………………………………………………………… 6 分

设 A 路线和 B 路线累计分数分别为 X,Y.则 X,Y 的可能值都为 6,9,12,15，………………………………………… 7 分

$P(X=6)=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$P(X=9)=C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}$，

$P(X=12)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{27}$，$P(X=15)=C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，…………………………………………………… 8 分

$E(X)=\frac{1}{27}\times6+\frac{6}{27}\times9+\frac{12}{27}\times12+\frac{8}{27}\times15=12$，…………………………………………………………… 9 分

$P(Y=6)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P(Y=9)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，

$P(Y=12)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，$P(Y=15)=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，…………………………………………………………… 10 分

$E(Y)=\frac{1}{8}\times6+\frac{3}{8}\times9+\frac{3}{8}\times12+\frac{1}{8}\times15=10.5$，……………………………………………………………… 11 分

$\therefore E(X)>E(Y)$，选择 A 路线. ………………………………………………………………………………………… 12 分

21.**解**：(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$，则 $2c=2\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$.

因为$\triangle ABF_2$ 的周长 $l=|AB|+|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=2a+2a=4a$， ………………… 1 分

所以 $4a=8$，解得 $a=2$，所以 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$， …………………………………………………………………… 2 分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………………………………………… 3 分

(2)依题意可知直线 n 的斜率不为 0，其方程可设为 $x=my+1$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $P(4,y_1)$，$Q(4,y_2)$. ……………………………………………………………………… 4 分

联立$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$得$(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

所以 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4}$.…………………………………………………………………………………… 5 分

因为 $S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot(4-1)=\frac{3}{2}|y_1-y_2|=\frac{3}{2}\sqrt{(y_1-y_2)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$ ………………………………… 6 分

$=\frac{3}{2}\sqrt{\left(-\frac{2m}{m^2+4}\right)^2-4\left(-\frac{3}{m^2+4}\right)}=\frac{6\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}$. …………………………………………………………………… 7 分

因为 $S_1=\frac{1}{2}|PM|\cdot|y_1|=\frac{1}{2}(4-x_1)\cdot|y_1|=\frac{1}{2}[4-(my_1+1)]\cdot|y_1|=\frac{1}{2}(3-my_1)\cdot|y_1|$， ………………… 8 分

同理 $S_2=\frac{1}{2}(3-my_2)\cdot|y_2|$. ………………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $S_1\cdot S_2=\frac{1}{4}(3-my_1)(3-my_2)\cdot|y_1y_2|=\frac{1}{4}[9-3m(y_1+y_2)+m^2y_1y_2]\cdot|y_1y_2|$

$=\frac{1}{4}\left[9-3m\left(-\frac{2m}{m^2+4}\right)+m^2\left(-\frac{3}{m^2+4}\right)\right]\cdot\frac{3}{m^2+4}=\frac{9(m^2+3)}{(m^2+4)^2}$，………………………………………… 10 分

所以 $\sqrt{S_1\cdot S_2}=\frac{3\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}$，故$\frac{\sqrt{S_1\cdot S_2}}{S}=\frac{\frac{3\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}}{\frac{6\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}}=\frac{1}{2}$，……………………………………………… 11 分

即 $2\sqrt{S_1\cdot S_2}-S=0$.

故存在实数 $\lambda=2$，使得 $\lambda\sqrt{S_1\cdot S_2}-S=0$ 成立. ……………………………………………………………………… 12 分

22.**解**：(1)当 $b=0$ 时，$f(x)=\left(ax-\frac{3}{4}\right)e^x$，

所以 $f'(x)=a\mathrm{e}^x+\left(ax-\frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^x=\left(ax+a-\frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^x$. ······························ 1 分

①当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$ 得,$x=\frac{3}{4a}-1$,

当 $x\in\left(-\infty,\frac{3}{4a}-1\right)$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{4a}-1\right)$ 上单调递增,

当 $x\in\left(\frac{3}{4a}-1,+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{3}{4a}-1,+\infty\right)$ 上单调递减. ······················ 2 分

②当 $a=0$ 时,$f'(x)=-\frac{3}{4}\mathrm{e}^x$,对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. ·· 3 分

③当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$ 得,$x=\frac{3}{4a}-1$,

当 $x\in\left(-\infty,\frac{3}{4a}-1\right)$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{4a}-1\right)$ 上单调递减,

当 $x\in\left(\frac{3}{4a}-1,+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{3}{4a}-1,+\infty\right)$ 上单调递增. ······················ 4 分

(2)当 $b=1$ 时,$f(x)=\left(ax-\frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$,

所以 $f'(x)=a\mathrm{e}^x+\left(ax-\frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)-\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\left[ax+a-\frac{3}{4}-\frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right]\mathrm{e}^x$. ················ 5 分

设 $g(x)=ax+a-\frac{3}{4}-\frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$,则 $g'(x)=a+\frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^3}$. ······································ 6 分

①当 $a<0$ 时,$f(1)=\left(a-\frac{3}{4}\right)\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}<-\frac{3\mathrm{e}}{4}<-\frac{5}{4}$,

与对任意的 $x\in[-2,+\infty)$,$f(x)\geqslant-\frac{5}{4}$ 恒成立矛盾,不合题意. ·· 7 分

②当 $0\leqslant a<1$ 时,$g'(x)>0$,故 $g(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $g(0)=a-1<0$,$g\left(\frac{7}{4a}-1\right)=a\left(\frac{7}{4a}-1\right)+a-\frac{3}{4}-\frac{1}{(\mathrm{e}^{\frac{7}{4a}-1}+1)^2}=1-\frac{1}{(\mathrm{e}^{\frac{7}{4a}-1}+1)^2}>0$,

故存在 $x_0\in\left(0,\frac{7}{4a}-1\right)$,使得 $g(x_0)=0$,故当 $x\in(0,x_0)$ 时,$g(x)<0$,此时 $f'(x)<0$,

$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减,所以 $f(x)<f(0)=-\frac{5}{4}$,不合题意. ·· 9 分

③当 $a=1$ 时,$g'(x)>0$,故 $g(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增.又因为 $g(0)=a-1=0$,

故当 $x\in[-2,0)$,$g(x)<0$,此时 $f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上单调递减,

当 $x\in(0,+\infty)$,$g(x)>0$,此时 $f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)\geqslant f(x)_{\min}=f(0)=-\frac{5}{4}$,满足题意. ·· 10 分

④当 $a>1$ 时,$g'(x)>0$,故 $g(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $g(0)=a-1>0$,$g(-1)=-\frac{3}{4}-\frac{1}{(\mathrm{e}^{-1}+1)^2}<0$,

故存在 $x_0\in(-1,0)$,使得 $g(x_0)=0$,

故当 $x\in(x_0,0)$ 时,$g(x)>0$,此时 $f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(x_0,0)$ 上单调递增,

所以 $f(x)<f(0)=-\frac{5}{4}$,不合题意. ··· 11 分

综上,$a=1$. ··· 12 分