2023年新高一入学分班测试

数学参考答案及解析

1．D

【分析】根据坐标“积和”运集的计算规则可知A、B、C、D四个点均在反比例函数图象上，据此即可判断结果．

【详解】设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$，

则有：$A\oplus B=x_1y_1+x_2y_2$，$B\oplus C=x_2y_2+x_3y_3$，

$C\oplus D=x_3y_3+x_4y_4$，$D\oplus B=x_2y_2+x_4y_4$，

依据$A\oplus B=B\oplus C=C\oplus D=D\oplus B$，得$x_1y_1=x_2y_2=x_3y_3+x_4y_4$，

令$x_1y_1=x_2y_2=x_3y_3+x_4y_4=k$，

则可知$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$均在反比例函数$y=\frac{k}{x}$上，

根据题意可设构成的四边形为$ABCD$，则该四边形的对角线为AC和BD，

根据反比例函数图象的特征可知，四个顶点均在双曲线上的四边形的对角线AC与BD无法使得$AC\perp BD$，故构成的四边形不可能是菱形，

故选：D．

【点睛】本题虽是选择题但构思巧妙，难度较大，主要考查了反比例函数图象特征以及平行四边形、菱形的判定等知识．根据$x_1y_1=x_2y_2=x_3y_3+x_4y_4$判断$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$均在反比例函数$y=\frac{k}{x}$上是解答本题的关键．

2．B

【分析】用含b的式子表示出抛物线的顶点坐标，然后消去b即可得到所求抛物线的解析式．

【详解】解：∵$y=2x^2+bx+1$的顶点坐标是$(-\frac{b^2}{4},\frac{8-b^2}{8})$，

设$x=-\frac{b^2}{4}$，$y=\frac{8-b^2}{8}$，

∴$b=-4x$，

∴$y=\frac{8-b^2}{8}=\frac{8-(-4x)^2}{8}=1-2x^2$．

∴所求抛物线的解析式为：$y=1-2x^2$．

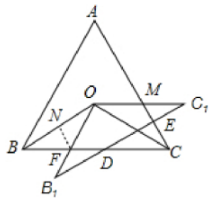
故选：B.

【点睛】此题主要考查了二次函数的性质，用含 b 的式子表示出抛物线的顶点坐标，然后再消去参数 b 是解题的关键.

3．D

【分析】令 OB_1 与 BC 的交点为 F，B_1C_1 与 AC 的交点为 M，过点 F 作 FN⊥OB 于点 N，根据等边三角形的性质及三角形内心的性质，证明△BFO 为等腰三角形，继而证明△BFO∽△B_1FD，根据相似三角形对应边成比例的性质，解得 $B_1D=2\sqrt{3}-2$，再结合△BFO≅△$CMO(ASA)$ 及解直角三角形求得 $C_1E=\sqrt{3}-1$，由此可解得 DE 的长.

【详解】令 OB_1 与 BC 的交点为 F，B_1C_1 与 AC 的交点为 M，过点 F 作 FN⊥OB 于点 N，如图，



∵将△OBC 绕点 O 逆时针旋转 30°得到△OB_1C_1，

$\therefore \angle BOF=30°$

∵点 O 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边△ABC 的内心，

$\therefore \angle OBF=30°$，$OB=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=2$

∴△FOB 为等腰三角形，$BN=\frac{1}{2}OB=1$

$\therefore BF=\frac{BN}{\cos\angle OBF}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=OF$

$\because \angle OBF=\angle OB_1D$，$\angle BFO=\angle B_1FD$

$\therefore \triangle BFO \backsim \triangle B_1FD$

$\therefore \frac{B_1D}{OB}=\frac{B_1F}{BF}$

$\because B_1F=OB_1-OF=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore B_1D = 2\sqrt{3} - 2$

在△BFO 和△CMO 中

$$\begin{cases} \angle OBF = \angle OCM \\ OB = OC \\ \angle BOF = \angle COM \end{cases}$$

$\therefore \triangle BFO \cong \triangle CMO(ASA)$

$OM = BF = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$C_1M = 2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

在△C_1ME 中，

$\angle C_1ME = \angle MOC + \angle MCO = 60°$，

$\angle C_1 = 30°$

$\therefore \angle C_1EM = 60°$

$\therefore C_1E = C_1M \cdot \sin\angle C_1EM = (2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}) \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 1$

$\therefore DE = B_1C_1 - B_1D - C_1E = 2\sqrt{3} - (2\sqrt{3} - 2) - (\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}$

故选：D.

【点睛】本题考查三角形的内切圆与内心、旋转的性质、等边三角形的性质等知识，是重要考点，难度一般，掌握相关知识是解题关键.

4．D

【分析】过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F，过点 C 作 $CG\perp AB$ 于点 G，由勾股定理可求 $BE=4\sqrt{5}$，根据 AAS 可证△AEB≌△AGC，得 $CG=BE=4\sqrt{5}$，易证△BDF∽△BAE，得出 $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DF}{AE}$，得出 $DF=\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD$，求 $CD+\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD$ 最小值，即求 $DF+CD$ 的最小值，由垂线段最短求解即可.

【详解】解：过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F，过点 C 作 $CG\perp AB$ 于点 G

又 $BE\perp AC$ 于点 E

∴$\angle AEB=90°$，$\angle DFB=90°$，$\angle AGC=90°$

又$\angle ABE$ 为公共角

∴△BDF∽△BAE

∴$\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DF}{AE}$

又 $AB=10$， $AE=2\sqrt{5}$

$\therefore DF=\frac{\sqrt{5}}{5}BD$

$\therefore CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD=DF+CD$

$\because DF+CD\geq CG$

$\therefore CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD\geq CG$

即 $CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值为 CG 的长

在 Rt$\triangle ABE$ 中

$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{10^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=4\sqrt{5}$

$\because AB=AC=10$，$\angle AEB=90°$，$\angle AGC=90°$

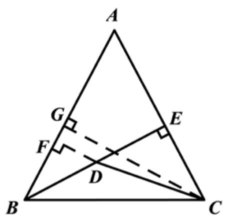
又 $\angle A$ 为公共角

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle AGC$（AAS）

$\therefore CG=BE=4\sqrt{5}$

$\therefore CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$

故选：D



【点睛】本题主要考查最短路径中的垂线段最短问题，解决本题借助了全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，相似三角形以及勾股定理求边长，综合性较强，难度较大.

5．D

【分析】根据作图过程及所作图形可知 $BD=BC=CD$，得出$\triangle BCD$是等边三角形；又因为 $AB=AC$， $BD=CD, AD=AD$，推出 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$，继而得出 $\angle BAD=\angle CAD$；根据，$\angle BAD=\angle CAD$，可知 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，根据三线合一得出 AD 垂直平分 BC；

四边形 ABCD 的面积等于$\triangle ABD$的面积与$\triangle ACD$的面积之和，为$\frac{1}{2}AD\cdot BC$．

【详解】解：∵ $BD=BC=CD$

∴$\triangle BCD$是等边三角形

故选项 B 正确；

∵ $AB=AC$， $BD=CD, AD=AD$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$

∴ $\angle BAD=\angle CAD$

故选项 A 正确；

∵ $\angle BAD=\angle CAD$， $AB=AC$

∴据三线合一得出 AD 垂直平分 BC

故选项 C 正确；

∵四边形 ABCD 的面积等于$\triangle ABD$的面积与$\triangle ACD$的面积之和

∴ $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AD\cdot BC$

故选项 D 错误.

故选：D.

【点睛】本题考查的知识点是等边三角形的判定、全等三角形的判定及性质、线段垂直平分线的判定以及四边形的面积，考查的范围较广，但难度不大.

6．B

【分析】先利用待定系数法求出抛物线解析式，和一次函数解析式，根据抛物线对称轴可判断①，利用抛物线的对称轴与 x 轴的一个交点可求另一交点可判断②，利用抛物线平移和顶点的位置可判断③，利用二次函数图像与一次函数的图象的位置比较大小，可判断④，根据 $ax_1^2+bx_1=ax_2^2+bx_2$ 可得出 $y_1=y_2$，利用对称性与对称轴关系可判断⑤即可.

【详解】解：∵抛物线的顶点坐标是 A（1，3），与 x 轴的一个交点 B（4，0），

∴ $y_1=a\left(x\text{-}1\right)^2+3$，

把 B 点坐标代入得 $a\left(4\text{-}1\right)^2+3=0$，

解得 $a=-\frac{1}{3}$，

抛物线 $y_1=-\frac{1}{3}\left(x\text{-}1\right)^2+3=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$，

直线 $y_2=mx+n$（$m\neq 0$）与抛物线交于 A，B 两点，

∴ $\begin{cases} m+n=3 \\ 4m+n=0 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} m=-1 \\ n=4 \end{cases}$，

直线 $y_2=-x+4$，

①∵对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\frac{2}{3}}{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=1$，则 $2a+b=0$

故①正确；

②∵对称轴为直线 $x=1$，与 x 轴的一个交点是 $(4,0)$，设另一交点为（m，0），

∴1-m=4-1，

∴m=-2，

与 x 轴的另一个交点是 $(-2,0)$，故②正确；

③∵把抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 向下平移 3 个单位，得到 $y=ax^2+bx+c-3$，

∴顶点坐标 $A(1,3)$ 变为 $(1,0)$，即抛物线与 x 只有一个交点，

∴方程 $ax^2+bx+c=3$ 有两个相等的实数根，故③正确；

④当 $1<x<4$ 时，二次函数图像在一次函数图像的上方

∴ $y_2<y_1$，故④正确；

⑤若 $ax_1^2+bx_1=ax_2^2+bx_2$，即 $ax_1^2+bx_1+c=ax_2^2+bx_2+c$

即 $y_1=y_2$，

则 x_1,x_2 关于函数的对称轴对称，

故 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)=1$，即 $x_1+x_2=2$，故⑤错误，

∴命题正确的有①②③④四个.

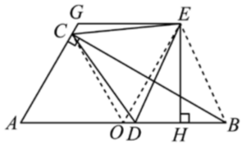
故选：B.

【点睛】本题考查了抛物线与 x 的交点，以及函数图象上点的坐标特征，要求学生熟练掌握函数与坐标轴的交点，顶点等点坐标的求法以及这些点代表的意义及函数特征.

7．B

【分析】取 AB 的中点 O，连接CO、EO、EB，根据题意得出□COE 和 $\triangle BOE$ 全等，然后得出□CEG 和□DCO 全等，设 $CG=a$，则 $AG=5a$，$OD=a$，根据题意列出一元一次方程求出 a 的值得出答案.

【详解】取 AB 的中点 O，连接CO、EO、EB，



$\because \angle ACB=90^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，

$\therefore \angle A=60^\circ$，$OC=OA$，

$\therefore$□ACO 为等边三角形，

$\therefore CA=CO$，

$\because$□CDE 是等边三角形，

$\therefore \angle ACD=\angle OCE$，

$\therefore$□$ACD\cong$□OCE，

$\therefore \angle COE=\angle A=60^\circ$，

$\therefore \angle BOE=60^\circ$，

$\because OC=OD$，$DE=DE$，$\angle BOE=\angle COE=60^\circ$

$\therefore \triangle COE\cong\triangle BOE$，

$\therefore EC=EB$，

$\therefore ED=EB$，

$\because EH\perp AB$，

$\therefore DH=BH=3$，

$\because GE$□AB，

$\therefore \angle G=180^\circ-\angle A=120^\circ$，

$\because \triangle ACO$ 为等边三角形，

$\therefore \angle AOC=60^\circ$，

$\therefore \angle G=\angle COD=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，

$\because$□CDE 是等边三角形，

$\therefore CD=CE$，

设$\angle OCD=\alpha$，则$\angle GCE=180^\circ-\angle ACO-\angle OCD-\angle DCE=60^\circ-\alpha$，

$\angle CDO=\angle AOC-\angle OCD=60^\circ-\alpha$，

∴$\angle CDO=\angle GCE$

在$\triangle CEG$和$\triangle DCO$中，

$$\begin{cases}\angle G=\angle COD\\ \angle CDO=\angle GCE\\ CD=CE\end{cases}$$

∴$\triangle CEG\cong\triangle DCO$，

∴$CG=OD$，

设$CG=a$，则$AG=5a$，$OD=a$，

∴$AC=OC=4a$，

∵$OC=OB$，

∴$4a=a+3+3$，

解得，$a=2$，

即$CG=2$．

故选：B.

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定，等边三角形的性质与判定，平行线的性质，熟练掌握是解题的关键.

8．C

【分析】本题的等量关系为：冰红茶总价钱+矿泉水总价钱=18，冰红茶瓶数+矿泉水瓶数≥7，然后整理求非负整数解即可.

【详解】解：设买冰红茶x瓶、矿泉水y瓶，

根据题意得$\begin{cases}3x+2y=18\\ x+y\geqslant 7\end{cases}$，（且x、y均为非负整数）

$y=9-\dfrac{3}{2}x$

则，$\begin{cases}x=2\\ y=6\end{cases}$或$\begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\ y=9\end{cases}$

所以有3种购买方式，故选C.

【点睛】本题主要考查了二元一次方程的应用，解决本题的关键是读懂题意，找到符合题意的不等关系式及所求量的等量关系，讨论出符合条件的整数解.

9．ACD

【分析】利用待定系数法将各点坐标两两组合代入 $y=ax^2+bx-2$,求得抛物线解析式为 $y=x^2-x-2$,再根据对称轴直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 求解即可得到 A 选项是正确答案,由抛物线解析式为 $y=x^2-x-2$,令 $y=0$,求解即可得到抛物线与 x 轴的交点坐标（-1,0）和（2,0）,从而判断出 B 选项不正确,令关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx-2-t=0$ 的根的判别式当 $\Delta>0$,解得 $t>-\frac{9}{4}$,从而得到 C 选项正确,根据抛物线图象的性质由 $n<0$,推出 $3<m+4<6$,从而推出 $h>0$,得到 D 选项正确.

【详解】当抛物线图象经过点 A 和点 B 时,将 A（1,-2）和 B（2,-2）分别代入 $y=ax^2+bx-2$,

得 $\begin{cases}a+b-2=-2\\4a+2b-2=-2\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$,不符合题意,

当抛物线图象经过点 B 和点 C 时,将 B（2,-2）和 C（2,0）分别代入 $y=ax^2+bx-2$,

得 $\begin{cases}4a+2b-2=-2\\4a+2b-2=0\end{cases}$,此时无解,

当抛物线图象经过点 A 和点 C 时,将 A（1,-2）和 C（2,0）分别代入 $y=ax^2+bx-2$ 得

$\begin{cases}a+b-2=-2\\4a+2b-2=0\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$,因此,抛物线经过点 A 和点 C,其解析式为 $y=x^2-x-2$,抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-1}{2\times1}=\frac{1}{2}$,故 A 选项正确,

因为 $y=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$,所以 $x_1=2$ $x_2=-1$,抛物线与 x 轴的交点坐标是（-1,0）和（2,0）,故 B 选项不正确,

由 $ax^2+bx-2=t$ 得 $ax^2+bx-2-t=0$,方程根的判别式 $\Delta=b^2-4a(-2-t)$ 当 $a=1$, $b=-1$ 时, $\Delta=9+4t$,当 $\Delta>0$ 时,即 $9+4t>0$,解得 $t>-\frac{9}{4}$,此时关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx-2=t$ 有两个不相等的实数根,故 C 选项正确,

因为抛物线 $y=x^2-x-2$ 与 x 轴交于点（-1,0）和（2,0）,且其图象开口向上,若 P（m,n）和 Q（m+4,h）都是抛物线上 $y=x^2-x-2$ 的点,且 n<0,得 $-1<m<2$,又得 $3<m+4<6$,

所以 h＞0,故 D 选项正确． $h>0$

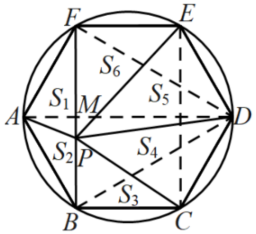
故选 ACD.

【点睛】本题考查抛物线与 x 轴的交点、根的判别式、二次函数的性质及二次函数图象上点的坐标特征，解题的关键是利用数形结合思想，充分掌握求二次函数的对称轴及交点坐标的解答方法．

10．BD

【分析】连接 BD，AD，FD，CE，AD 交 BF 于 M，在正六边形 $ABCDEF$ 中求得 $\angle FAB=\angle AFE=120^\circ$，推得 $\angle AFB=\angle ABF=30^\circ$，$\angle BFE=90^\circ$ 易得 $AD=4a$，$MD=3a$，$BF=2\sqrt{3}a$，$S_{\triangle ABF}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle DEF}=\sqrt{3}a^2$ 设 $BP=x$，则 $FP=BF-BP=2\sqrt{3}a-x$，分别求得 S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6 计算即可．

【详解】解：连接 BD，AD，FD，CE，AD 交 BF 于 M，



∵六边形 $ABCDEF$ 为正六边形，

∴ $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE=\angle DEF=\angle EFA=\angle FAB=120^\circ$，

$AB=BC=CD=DE=EF=FA=2$，

∴ $\angle ABF=\angle AFB=\angle DEC=\angle DCE=30^\circ$，

∴ $\angle BFE=90^\circ$，$\angle FBC=90^\circ$，$\angle BCE=90^\circ$，

∴四边形 $BCEF$ 是矩形，

在 Rt$\triangle AMF$ 中，$\angle AFM=30^\circ$，∴ $AM=\frac{1}{2}AB=1$，

故 $MF=\sqrt{AF^2-AM^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

∴ $BM=\sqrt{3}$，$BF=2MF=3\sqrt{3}$，

∵ $\angle CDE=\angle FAB=120^\circ$，$AB=CD=DE=FA$，

∴ $\triangle FAB\cong\triangle EDC$

则 $MD=2+1=3$，$AD=4$，

$\therefore S_{\triangle ABF}=S_{\triangle CDB}=S_{\triangle DEC}=S_{\triangle EFD}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$，

设 $BP=x$，则 $FP=FB-BP=2\sqrt{3}-x$，

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times FP\times AM=\frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{3}-x\right)\times 1=\sqrt{3}-\frac{1}{2}x$，

$S_2=\frac{1}{2}\times BP\times AM=\frac{1}{2}x$，

$S_3=\frac{1}{2}\times BP\times BC=\frac{1}{2}x\times 2=x$，

$S_4=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle PBD}-S_3=\sqrt{3}+\frac{1}{2}x\times 3-x=\sqrt{3}+\frac{1}{2}x$，

$S_6=\frac{1}{2}\times FP\times EF=\frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{3}-x\right)\times 2=2\sqrt{3}-x$，

$S_5=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle DPF}-S_6=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times 3\times\left(2\sqrt{3}-x\right)-\left(2\sqrt{3}-x\right)=2\sqrt{3}-\frac{1}{2}x$，

故 $S_2+S_6=\frac{1}{2}x+2\sqrt{3}-x=2\sqrt{3}-\frac{1}{2}x$；

$S_4+S_5=\sqrt{3}+\frac{1}{2}x+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}x=3\sqrt{3}$；

$S_5+S_6=2\sqrt{3}-\frac{1}{2}x+2\sqrt{3}-x=4\sqrt{3}-\frac{3}{2}x$；

$S_1+S_3+S_5=\sqrt{3}-\frac{1}{2}x+x+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}x=3\sqrt{3}$；

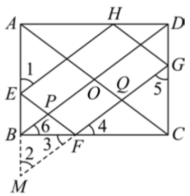
故选：BD．

【点睛】本题考查了正多边形的性质，等腰三角形的性质，勾股定理，三角形面积公式，矩形的判定和性质，30° 角所对的直角边等于斜边的一半等，熟练掌握正多边形的性质是解题的关键．

11．BCD

【分析】延长 AB，GF 交于点 M，根据平行四边形的性质，矩形的性质，以及平行线分线段成比例，逐一进行判断即可．

【详解】如图，延长 AB，GF 交于点 M，



$\because$ 在平行四边形 $EFGH$ 中，$EH \parallel FG$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，

$\because \angle 3 = \angle 4$，$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 不一定相等，

$\therefore \angle 1 = \angle 4$ 不一定成立，

即 $\angle AEH = \angle CFG$ 不一定相等，故 A 选项不符合题意；

$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中 $AB \parallel CD$，

$\therefore \angle 5 = \angle 2$，$\angle BAD = \angle BCD = 90°$，

$\therefore \angle 5 = \angle 1$，

$\because$ 在平行四边形 $EFGH$ 中 $EH = FG$，

$\therefore \triangle AEH \cong \triangle CGF(\text{AAS})$，

$\therefore AE = CG$，

$\because EF \parallel AC$，

$\therefore \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{BF}{BC}$，

$\therefore \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{CF}{BC}$，

$\because CG = AE$，$CD = AB$，

$\therefore \dfrac{CG}{CD} = \dfrac{CF}{BC}$，

$\therefore FG \parallel BD$，故 B 选项正确；

$\because EF \parallel AC$，$FG \parallel BD$，

$\therefore \dfrac{EF}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$，$\dfrac{FG}{BD} = \dfrac{CF}{BC}$，

$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中 $AC = BD$，

$\therefore \dfrac{EF + FG}{AC} = \dfrac{EF}{AC} + \dfrac{FG}{BD} = \dfrac{BF}{BC} + \dfrac{CF}{BC} = 1$，

$\therefore l = 2(EF + FG) = 2AC$，故 C 选项正确；

$\because$ 点 O 为 BD 中点，$FG \parallel BD$，

$\therefore$ 点 Q 为 FG 中点，同理可得点 P 为 EF 中点，

$\therefore S_{\text{四边形}OPFQ} = \dfrac{1}{4} S_{\square EFGH} = \dfrac{1}{4} S_1$，$S_{\triangle BOC} = \dfrac{1}{4} S_{\text{矩形}ABCD} = \dfrac{1}{4} S_2$，

设 $\dfrac{BF}{BC} = x$，则 $\dfrac{CF}{BC} = 1 - x$，

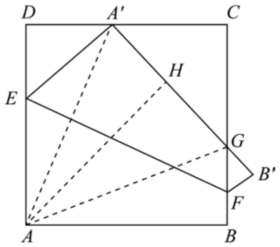
$\because PF \parallel OC$，$FQ \parallel OB$，

解得：$a=\frac{8}{9}$，

∴ $A'D=3a=\frac{8}{3}$，$A'C=CD-A'D=\frac{16}{3}$，

故 B 正确；

过点 A 作 $AH\perp A'G$，垂足为 H，连接 $A'A$，AG，则 $\angle AHA'=\angle AHG=90°$，



由折叠的性质可知 $\angle EA'G=\angle EAB=90°$，$A'E=AE$，

∴ $\angle EAA'=\angle EA'A$，

∵ $\angle D=90°$，

∴ $\angle EAA'+\angle DA'A=90°$，

∵ $\angle EAA'+\angle DA'A=90°$，

∴ $\angle EA'A+\angle DA'A=90°=\angle EA'A+\angle HA'A$，

∴ $\angle DA'A=\angle HA'A$，

在 $\Delta AA'D$ 和 $\Delta AA'H$ 中

$$\begin{cases}\angle DA'A=\angle HA'A\\ \angle D=\angle AHA'=90°\\ AA'=AA'\end{cases},$$

∴ $\Delta AA'D\cong\Delta AA'H(AAS)$，

∴ $AD=AH$，$A'D=A'H$，

∵ $AD=AB$，

∴ $AH=AB$，

在 Rt△ABG 与 Rt□AHG 中，

$$\begin{cases}AG=AG\\ AB=AH\end{cases},$$

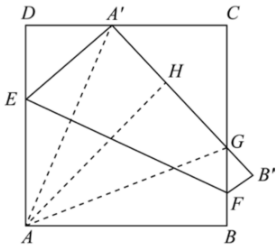
∴ $Rt\Delta ABG\cong Rt\Delta AHG(HL)$，

解得：$a=\frac{8}{9}$，

∴ $A'D=3a=\frac{8}{3}$，$A'C=CD-A'D=\frac{16}{3}$，

故 B 正确；

过点 A 作 $AH\perp A'G$，垂足为 H，连接 $A'A$，AG，则 $\angle AHA'=\angle AHG=90°$，



由折叠的性质可知 $\angle EA'G=\angle EAB=90°$，$A'E=AE$，

∴ $\angle EAA'=\angle EA'A$，

∵ $\angle D=90°$，

∴ $\angle EAA'+\angle DA'A=90°$，

∵ $\angle EAA'+\angle DA'A=90°$，

∴ $\angle EA'A+\angle DA'A=90°=\angle EA'A+\angle HA'A$，

∴ $\angle DA'A=\angle HA'A$，

在 $\Delta AA'D$ 和 $\Delta AA'H$ 中

$$\begin{cases}\angle DA'A=\angle HA'A\\ \angle D=\angle AHA'=90°,\\ AA'=AA'\end{cases}$$

∴ $\Delta AA'D\cong\Delta AA'H(AAS)$，

∴ $AD=AH$，$A'D=A'H$，

∵ $AD=AB$，

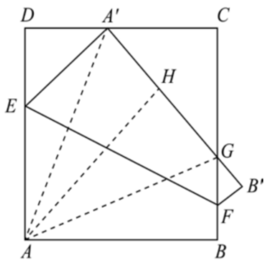
∴ $AH=AB$，

在 Rt△ABG 与 Rt□AHG 中，

$$\begin{cases}AG=AG\\ AB=AH\end{cases},$$

∴ $Rt\Delta ABG\cong Rt\Delta AHG(HL)$，

$\therefore HG=BG$，



$\therefore \triangle A'CG$ 周长 $=A'C+A'G+CG$

$=A'C+A'H+HG+CG$

$=A'C+A'D+BG+CG$

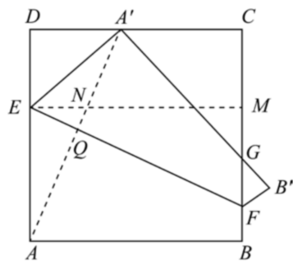
$=CD+BC$

$=16$，

$\therefore$ 当 A' 在 CD 上移动时，$\Delta A'CG$ 周长不变，

故 C 错误；

如图，过点 E 作 $EM\perp BC$，垂足为 M，连接 $A'A$ 交 EM，EF 于点 N，Q，



$\therefore EM//CD$， $EM=CD=AD$，

$\therefore \angle AEN=\angle D=90^\circ$，

由翻折可知：EF 垂直平分 $A'A$，

$\therefore \angle AQE=90^\circ$，

$\therefore \angle EAN+\angle ANE=\angle QEN+\angle ANE=90^\circ$，

$\therefore \angle EAN=\angle QEN$，

在$\Delta AA'D$和ΔEFM中，

$$\begin{cases}\angle DAA' = \angle MEF \\ AD = EM \\ \angle D = \angle ENF = 90^\circ\end{cases},$$

$\Delta AA'D \cong \Delta EFM(ASA)$，

∴ $AA' = EF$，

故D正确．

故选：ABD．

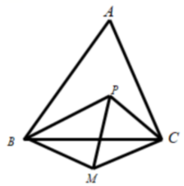
【点睛】本题考查了正方形的性质，折叠的性质，勾股定理，全等三角形的判定与性质等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

13．　90　$\sqrt{7}-\sqrt{3}$

【分析】（1）设$\angle PBA = \alpha, \angle PBC = \beta, \angle CBM = \gamma$，画出图形，由$MB = MP$得$\angle MBP = \angle MPB = \beta + \gamma$，由$MB = MC$得$\angle BCM = \angle CBM = \gamma$，由$MP = MC$得$\angle MPC = \angle PCM = \alpha + \gamma$，再利用三角形内角和定理得到答案；

（2）求出$\angle BPC = 120^\circ$是定值，点P在以M为圆心，MB长为半径的圆上，连接AM，交圆M于点P'，得到$\angle MBC = \angle MCB = 30^\circ$，过点$M$作$MD \perp BC$，根据三角函数求出$MD = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$BM = \sqrt{3}$，由勾股定理求出$AM$连接$AP$，则$AP \ge AM - MP$，当$P$与$P'$重合时，$AP$有最小值，求出$AP'$即可．

【详解】解：（1）设$\angle PBA = \alpha, \angle PBC = \beta, \angle CBM = \gamma$，如图，



则$\angle ABM = \alpha + \beta + \gamma$，

由题意可得，M是BP和CP中垂线上的点，

∴ $MB = MP, MP = MC$即$MB = MP = MC$，

∵ $MB = MP$，

∴ $\angle MBP = \angle MPB = \beta + \gamma$，

∵ $MB = MC$，

∴ $\angle BCM = \angle CBM = \gamma$，

又 $\angle PBA = \angle PCB = \alpha$，

∴ $\angle PCM = \angle PCB + \angle BCM = \alpha + \gamma$，

∵ $MP = MC$，

∴ $\angle MPC = \angle PCM = \alpha + \gamma$，

∴ $\angle BPC = \angle MPB + \angle MPC = \beta + \gamma + \alpha + \gamma = \alpha + \beta + 2\gamma$，

又 $\angle PBC = \beta$， $\angle PCB = \alpha$，

在 $\triangle BPC$ 中，有 $\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180°$，

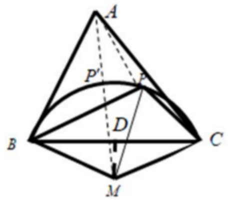
∴ $\alpha + \beta + 2\gamma + \beta + \alpha = 180°$，

即 $\alpha + \beta + \gamma = 90°$，

即 $\angle ABM = \alpha + \beta + \gamma = 90$；

故答案为：90

（2）如图，



∵ $\angle ABC = \angle PBA + \angle PBC = 60°, \angle PBA = \angle PCB$，

∴ $\angle PCB + \angle PBC = 60°$，即 $\angle BPC = 180° - \angle PCB - \angle PBC = 120°$，

在 $\triangle BPC$ 中， $BC = 3, \angle BPC = 120°$，

∵ $BC = 3$ 是定值，

∴ $\angle BPC = 120°$ 是定值，

即点 P 在以 M 为圆心， MB 长为半径的圆上，

连接 AM ，交圆 M 于点 P'，

由(1)中结论可知 $\angle ABM = 90°$，又 $\angle ABC = 60°$，

∴ $\angle MBC = 30°$，

又 $MB = MC$，

$\therefore \angle MBC=\angle MCB=30^{\circ}$，

过点 M 作 $MD\perp BC$，

$\because MB=MC$，$MD\perp BC$，$BC=3$，

$\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$，

$\because \angle MBC=30^{\circ}$，

$\therefore \tan\angle MBC=\frac{MD}{BD}=\frac{MD}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $MD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \sin\angle MBC=\frac{MD}{BM}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{BM}=\frac{1}{2}$，即 $BM=\sqrt{3}$，

又 $AB=2,\angle ABM=90^{\circ}$，

$\therefore AM=\sqrt{AB^{2}+BM^{2}}=\sqrt{7}$，

连接 AP，则 $AP\geq AM-MP$，

当 P 与 P' 重合时，AP 有最小值，

$\because BM=\sqrt{3}$，即 $BM=PM=MC=\sqrt{3}$，即 $MP'=\sqrt{3}$

$\therefore AP'=AM-MP'=\sqrt{7}-\sqrt{3}$，即 AP 最小值为 $\sqrt{7}-\sqrt{3}$

综上，AP 最小值为 $\sqrt{7}-\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{7}-\sqrt{3}$．

【点睛】此题考查了线段垂直平分线的性质，三角形内角和定理，锐角三角函数，动点问题，勾股定理，正确作出辅助线及掌握各知识点是解题的关键．

14．①②③④⑤

【分析】根据翻折变换的性质和正方形的性质可证 $Rt\triangle ABG\cong Rt\triangle AFG$；在直角 $\triangle ECG$ 中，根据勾股定理可证 $BG=GC$；通过证明 $\angle AGB=\angle AGF=\angle GFC=\angle GCF$，由平行线的判定可得 $AG//CF$；分别求出 $S_{\triangle EGC}$ 与 $S_{\triangle AFE}$ 的面积比较即可；求得 $\angle GAF=45^{\circ}$，$\angle AGB+\angle AED=180^{\circ}-\angle GAF=135^{\circ}$，即可得到答案．

【详解】解：$\because$ AB=AD=AF，AG=AG，$\angle$B=$\angle$AFG＝90°，

$\therefore \triangle ABG\cong\triangle AFG(HL)$，

故①正确；

$\because CD = AB = 6$，

$\therefore EF = DE = \frac{1}{3}CD = 2$，

$\therefore EC = CD - DE = 4$，

设 $BG = FG = x$，则 $CG = 6 - x$，

在 Rt□ECG 中，由勾股定理得：$EG^2 = CG^2 + EC^2$，

即：$(x+2)^2 = (6-x)^2 + 4^2$，

解得：$x = 3$，

$\therefore BG = 3$，

$\therefore BG = 3 = 6 - 3 = CG$，

故②正确；

$\because CG = BG, BG = GF$，

$\therefore CG = GF$，

$\because \triangle FGC$ 是等腰三角形，$\angle GFC = \angle GCF$，

$\because Rt\triangle ABG \cong Rt\triangle AFG$，

$\therefore \angle AGB = \angle AGF$，

$\therefore \angle AGB + \angle AGF = 2\angle AGB = 180° - \angle FGC = \angle GFC + \angle GCF = 2\angle GFC = 2\angle GCF$，

$\therefore \angle AGB = \angle AGF = \angle GFC = \angle GCF$，

$\therefore AG // CF$，

故③正确；

$\because S_{\triangle GCE} = \frac{1}{2}GC \cdot CE = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$，$S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2}AF \cdot EF = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$，

$\therefore S_{□EGC} = S_{□AFE}$，

故④正确；

$\because \angle BAG = \angle FAG, \angle DAE = \angle FAE$，

又$\because \angle DAB = 90°$，

$\therefore \angle GAE = 45°$，

$\therefore \angle AGB + \angle AED = 180° - \angle GAE = 135°$，

故⑤正确；

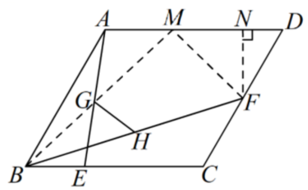
故答案为：①②③④⑤.

【点睛】本题考查了翻折变换的性质和正方形的性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理，平行线的判定，三角形的面积计算等知识．此题综合性较强，难度较大，解题的关键是注意数形结合思想与方程思想的应用．

15．$\sqrt{3}$

【分析】连接BG交AD于点M，连接FM易证得$\triangle BGE\cong\triangle MGA$，得到点$G$为$BM$的中点，所以$GH$是$\triangle BFM$中位线，可得到$GH=\frac{1}{2}FM$，求$GH$最小值即为求$FM$最小值的一半，随着点$E$的变化，点$M$在$AD$上动，即当$FM\perp AD$时，$FM$有最小值，然后在$\triangle DMF$中，借助三角函数计算即可．

【详解】解：如图，连接BG交AD于点M，连接FM，过点F作$FN\perp AD$于点N，



$\because$点G为AE中点，

$\therefore AG=EG$，

$\because$四边形$ABCD$是菱形，

$\therefore AD\parallel BC$，$AB=CD=8$，

$\therefore\angle AMG=\angle EBG$，

$\because\angle BGE=\angle MGA$，

$\therefore\triangle BGE\cong\triangle MGA$，

$\therefore BG=MG$，

$\therefore$点G为BM的中点，

$\because$点H为BF的中点，

$\therefore GH$是$\triangle BFM$中位线，

$\therefore GH=\frac{1}{2}FM$，

$\therefore$求GH最小值即为求FM最小值的一半，随着点E的变化，点M在AD上动，即当$FM\perp AD$时，FM有最小值，即FM最小值$=FN$，

$\because F$是CD的中点，

$\therefore FD = 4$，

$\because \angle D = 60?$

$\therefore FN = FD\sin 60?=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$，

$\therefore GH = \sqrt{3}$．

故答案为：$\sqrt{3}$

【点睛】本题主要考查动点最值，根据条件做出辅助线，利用中位线转化所求线段，然后借助点到线距离垂线段最短计算即可．

16．$2\sqrt{3}$

【分析】取点 D 的特殊位置：当点 D 与点 F 重合时，当点 D 在 CA 延长线与圆 A 的交点时，当 CD 与圆 A 相切时，确定 FE 的长度都是 0.5，从而得到点 E 的运动轨迹是以点 F 为圆心，0.5 为半径的圆上运动，故而得到线段 BE 的最大值与最小值，由此得到答案．

【详解】∵△ABC 为等边三角形，AB=2，

∴AC=AB=2，

设 AC 交圆 A 于点 F，

∵点 D 是以 A 为圆心，半径为 1 的圆上一动点，

∴当点 D 与点 F 重合时，如图 1，FE=0.5，

当点 D 在 CA 延长线与圆 A 的交点时,如图 2，FE=0.5，

当 CD 与圆 A 相切时，FE=0.5，

故点 E 在以点 F 为圆心，0.5 为半径的圆上运动，

当点 B、F、E 三点共线时，线段 BE 有最大值和最小值，如图 4：

∵AF=1，AC=2，

∴FC=1，

∴点 F 是 AC 的中点，

∵△ABC 是等边三角形，

∴BF⊥AC，

∴BF=$\sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，

线段 BE 的最大值=$\sqrt{3} + 0.5$，最小值=$\sqrt{3} - 0.5$，

∴线段 BE 的最大值与最小值之和为 $2\sqrt{3}$，

故答案为：$2\sqrt{3}$.

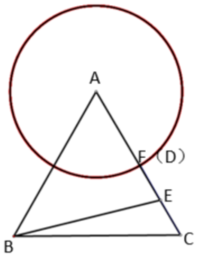


图 1

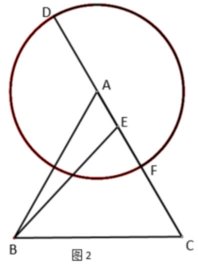


图 2

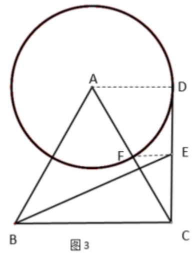


图 3

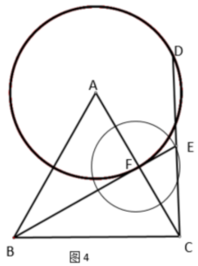


图 4

【点睛】此题考查圆与动点问题，圆的性质，圆的切线的性质定理，等边三角形的性质，勾股定理，根据题意理解点 D 运动的路线得到点 E 的运动轨迹是解题的关键.

17．(1)证明见解析；(2) 四边形 $ACDB$ 的面积为$8\sqrt{2}$.

【详解】【分析】（1）根据尺规作图可知 AF 平分∠BAC，再根据 DF//AC，可得 AD=DF，再由两组对边分别平行的四边形是平行四边形可得四边形 AEFD 是平行四边形，继而可得平行四边形 AEFD 是菱形，根据“亲密菱形”的定义即可得证；

（2）设菱形的边长为 a，即 DF=AD=a，则 BD=6-a，可证得△BDF∽△BAC，根据相似三角形的性质可求得 a=4，过 D 作 DG⊥AC，垂足为 G，在 Rt△ADG 中， DG=$2\sqrt{2}$，继而可求得面积.

【详解】（1）由尺规作图可知 AF 平分∠BAC，

∴∠DAF=∠EAF，

∵DF//AC，∴∠DFA=∠EAF，∴∠DAF=∠DFA，∴AD=DF，

∵FD//AC，FE//AB，∴四边形 AEFD 是平行四边形，

∴平行四边形 AEFD 是菱形，

∵∠BAC 与∠DAE 重合，点 F 点 BC 上，

∴菱形 AEFD 为△ABC 的“亲密菱形”；

（2）设菱形的边长为 a，即 DF=AD=a，则 BD=6-a，

∵DF//AC，∴△BDF∽△BAC，

∴BD：BA=BF：AC，

即（6-a）:6=a：12，

∴a=4，

过 D 作 DG⊥AC，垂足为 G，

在 Rt△ADG 中，∠DAG=45°，∴DG=$\frac{\sqrt{2}}{2}$AD=2$\sqrt{2}$，

∴S 菱形 AEFD=AE•DG=8$\sqrt{2}$，

即四边形 AEFD 的面积为 8$\sqrt{2}$.

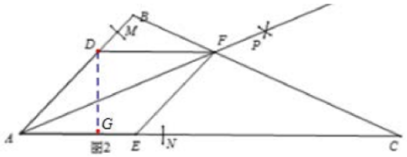


图2

【点睛】本题考查了尺规作图，新概念题，菱形的判定与性质等，正确理解新概念是解题的关键.

18.（1）$\angle ABP$=30°；（2）3；（3）$\frac{5\sqrt{3}}{6}$

【分析】（1）证明 $PE=2AE$，推出 $\angle APE=30°$ 即可解决问题.

（2）由翻折可知：EF 垂直平分 PB，设 $EQ=a$，求出 FQ 即可解决问题.

（3）如图 3－1 中，作点 P 关于 CD 的对称点 N，连接 FN 交 CD 于 G，此时 $\Delta FCG \backsim \Delta PDG$，以 PF 为直径作圆交 CD 于 G_1，G_2，此时 $\Delta PDG_1 \backsim \Delta FCG_1$，$\Delta PDG_2 \backsim \Delta FCG_2$．①当点 G 与 G_2 重合时，满足条件，易证 $FC=CG$，$DG=DP$，设 $CF=CG=a$，$PD=DG=b$．构建方程求出 a 与 b 的关系即可解决问题．②当 G_1，与 G_2 重合时，满足条件，此时以 PF 为直径的圆与 CD 相切，设 $CF=m$，$PD=n$，构建方程求出 m 与 n 的关系即可解决问题.

【详解】解：（1）∵ $AE=\frac{1}{3}AB$，

∴ $BE=2AE$，

由翻折可知：$BE=PE$，

$\therefore PE=2AE$，$\angle EBP=\angle EPB$ ，

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A=90^\circ$，

$\therefore \angle APE=30^\circ$，

$\therefore \angle AEP=60^\circ$，

$\because \angle AEP=\angle EBP+\angle EPB$ ，

$\therefore \angle EBP=\angle EPB=30^\circ$ ，

$\therefore \angle ABP=30^\circ$.

（2）由翻折可知：EF 垂直平分 PB，设 $EQ=a$，

在 $Rt\Delta BEQ$ 中，$\because \angle EBQ=30^\circ$ ，

$\therefore BE=2EQ=2a$，

在 $Rt\Delta EFB$ 中，$\because \angle EBF=90^\circ$，$\angle BEF=60^\circ$ ，

$\therefore \angle EFB=30^\circ$ ，

$\therefore EF=2BE=4a$ ，

$\therefore QF=3a$ ，

$$\therefore \frac{S_{\Delta PBF}}{S_{\Delta PBE}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot PB\cdot EQ}{\frac{1}{2}\cdot PB\cdot FQ}=\frac{FQ}{EQ}=\frac{3a}{a}=3$$.

（3）如图 3 - 1 中，作点 P 关于 CD 的对称点 N，连接 FN 交 CD 于 G，此时 $\Delta FCG\backsim\Delta PDG$，

以 PF 为直径作圆交 CD 于 G_1，G_2，此时 $\Delta PDG_1\backsim\Delta FCG_1$ ，$\Delta PDG_2\backsim\Delta FCG_2$.

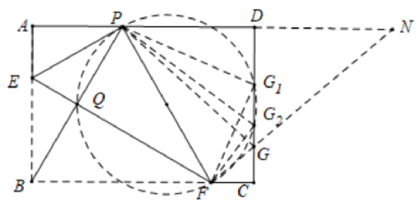


图3-1

①当点 G 与 G_2 重合时，满足条件，易证 $FC=CG$，$DG=DP$，设 $CF=CG=a$，$PD=DG=b$ ，

则：$BF=2(b-a)$，$AB=a+b$，$BC=2b-a$ ，

$\because AB=\frac{\sqrt{3}}{2}PB$,

$\therefore a+b=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2(b-a)$,

$\therefore a=(2-\sqrt{3})b$,

$\therefore \frac{BC}{AB}=\frac{2b-a}{a+b}=\frac{2b\text{-}(2-\sqrt{3})b}{(2-\sqrt{3})b+b}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

②当 G_1，与 G_2 重合时，满足条件，此时以 PF 为直径的圆与 CD 相切，设 $CF=m$，$PD=n$ ，

则：$BF=2(n-m)$，$PF=2\times\frac{m+n}{2}=m+n$ ，

$\because BF=PF$，

$\therefore 2(n-m)=m+n$ ，

$\therefore n=3m$，

$\therefore BC=2n-m=5m$， $AB=PB\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}m$，

$\therefore \frac{BC}{AB}=\frac{5m}{2\sqrt{3}m}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

【点睛】本题属于相似三角形综合题，考查了相似三角形的判定和性质，解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.

19.（1） $y=-\frac{1}{4}x^2+6x+25$；（2）能，理由见解析.

【详解】试题分析：（1）直接利用待定系数法求二次函数解析式进而得出答案；

（2）首先利用待定系数法求出一次函数解析式，进而令 y=45，有 45=-$\frac{7}{4}$x+95，求出 x 的值，进而得出讲课后注意力不低于 45 的时间.

（1）当 0≤t≤10 时，设抛物线的函数关系式为 y=ax2+bx+c．由于它的图象经过点（0，25），（4，45），（10，60），

所以$\begin{cases}c=25\\16a+4b+c=45\\100a+10b+c=60\end{cases}$ ，

解得：$\begin{cases}c=25\\a=-\frac{1}{4}\\b=6\end{cases}$，

所以 $y=-\frac{1}{4}x^2+6x+25$；

（2）当 20≤x≤40 时，设函数解析式为：y=kx+d，将（20，60），（40，25）代入得：

$\begin{cases}20k+d=60\\40k+d=25\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-\frac{7}{4}\\d=95\end{cases}$

∴ $y=-\frac{7}{4}x+95$，

令 y=45，有 $45=-\frac{7}{4}x+95$，

解得：$x=28\frac{4}{7}$，

即讲课后第 $28\frac{4}{7}$ 分钟时注意力不低于 45，

当 0≤x≤10 时，令 y=45，有 $45=-\frac{1}{4}x^2+6x+25$，

解得：$x_1=4$，$x_2=20$（舍去），

即讲课后第 4 分钟时，注意力不低于 45，

所以讲课后注意力不低于 45 的时间有 $28\frac{4}{7}-4=24\frac{4}{7}$（分钟）＞24（分钟），

所以老师可以经过适当的安排，使学生在探究这道数学题时，注意力指数不低于 45.

考点：二次函数的应用.

20．(1)①等腰；②1

(2)$\triangle CQB$ 是等腰直角三角形，证明见解析

(3) AQ 的取值范围是 $\sqrt{61}-5\le AQ\le\sqrt{26}$

【分析】（1）①根据折叠的性质得出 EF 垂直平分 BC，根据垂直平分线的性质即可得出 $\triangle CQB$ 是等腰三角形；

②由折叠得 $CQ=CD=1$，若 $\triangle CQB$ 是等边三角形，则 $BC=CQ=1$，根据矩形的性质得出 $AD=BC=1$，

（2）由(1)得 $CQ=BQ=CD=1$，根据勾股定理的逆定理得出 $CQ^2+BQ^2=BC^2$，证明 $\triangle CQB$ 是直角三角形，进而即可得出结论；

（3）连接 AC，以点 C 为圆心，CD 长为半径作圆交 EF 于点 G，交 BC 于点 H，得出

$CQ=CD=5$，即点Q在⊙C上运动，连接AG、CG、CH，则$CG=CH=5$，当点Q落在矩形$ABFE$内部(包括边)时，则$AC-5\le AQ\le AH$.

【详解】（1）如图1，①∵将矩形纸片$ABCD$沿EF折叠，点C与点B重合，

∴EF垂直平分BC，

∴$CQ=BQ$，

∴△CQB是等腰三角形，

故答案为：等腰.

②由折叠得$CQ=CD=1$，

若△CQB是等边三角形，则$BC=CQ=1$，

∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$AD=BC=1$，

故答案为：1.

（2）△CQB是等腰直角三角形，

证明：如图1，由(1)得$CQ=BQ=CD=1$，

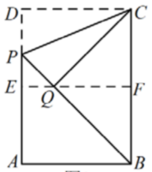


图1

∴$CQ^2+BQ^2=1^2+1^2=2$，

∵$AD=BC=\sqrt{2}$，

∴$BC^2=(\sqrt{2})^2=2$

∴$CQ^2+BQ^2=BC^2$，

∴△CQB是直角三角形，

∵$CQ=BQ$，

∴△CQB是等腰直角三角形.

（3）如图2，连接AC，以点C为圆心，CD长为半径作圆交EF于点G，交BC于点H，

∵$AB=CD=5$，$AD=BC=6$，$\angle B=90°$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$，

$\because CQ=CD=5$，

$\therefore$ 点 Q 在⊙C 上运动，

连接 AG 、CG 、CH ，则 $CG=CH=5$，

$\therefore BH=BC-CH=6-5=1$，

$\therefore AH=\sqrt{AB^2+BH^2}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$

$\because$ 四边形 $ABFE$ 是矩形，

$\therefore \angle CFG=\angle AEG=90^\circ$， $EF=AB=5$，

$\because AE=BF=CF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 6=3$，

$\therefore FG=\sqrt{CG^2-CF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore EG=EF-FG=5-4=1$，

$\therefore AG=\sqrt{AE^2+EG^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

当点 Q 落在矩形 $ABFE$ 内部（包括边）时，则 $AC-5\le AQ\le AH$，

即 $\sqrt{61}-5\le AQ\le\sqrt{26}$，

$\therefore AQ$ 的取值范围是 $\sqrt{61}-5\le AQ\le\sqrt{26}$.

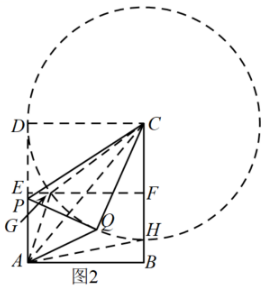


图2

【点睛】本题考查了矩形与折叠问题，等腰三角形的性质与判定，等边三角形的性质与判定，勾股定理，圆外一点到圆的最值问题，轴对称的性质，综合运用以上知识是解题的关键.

21．(1)$\frac{m}{3}$

(2) $\frac{AM}{DM}=\frac{m}{3}$ 保持不变，见解析

(3)线段 AD 的最大值为 $\sqrt{15}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$，最小值为 $\sqrt{15}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

【分析】（1）在 $Rt\triangle DEF$ 中，根据 $\angle EDF=30°$，$EF=1$，求出 $DE=\sqrt{3}$，在 $Rt\triangle ABC$ 中，根据 $\angle ACB=30°$，$BC=1$，求出 $AB=\frac{\sqrt{3}}{3}$，在 $Rt\triangle GEB$ 中，根据 $\angle BEG=30°$，$EB=m+1$，求出 $BG=\frac{\sqrt{3}}{3}m+\frac{\sqrt{3}}{3}$，算出 AG，证明 $DE//GB$，得出 $\frac{AM}{DM}=\frac{AG}{DE}=\frac{m}{3}$ 即可；

（2）过 B 点作 $BG\perp BE$，交射线 EM 于点 G，连接 AG，根据 $\frac{BG}{BE}=\frac{BA}{BC}$，$\angle GBA=\angle EBC$，证明 $\triangle GBA\backsim\triangle EBC$，得出 $AG=\frac{\sqrt{3}}{3}CE=\frac{\sqrt{3}}{3}m$，$\angle 1=\angle 5$，证明 $DE//AG$，得 $\triangle AMG\backsim\triangle DME$，进而得出 $\frac{AM}{DM}=\frac{AG}{DE}=\frac{m}{3}$ 即可；

（3）由题意得，点 A 在以 C 为圆心，以 CA 为半径的圆上移动，当点 D、A、C 三点共线时，A_1D 是最小值，A_2D 是最大值，然后求出 DC、AC 即可得出答案.

（1）

解：∵在 $Rt\triangle DEF$ 中，$\angle EDF=30°$，$EF=1$，

∴ $DE=\frac{EF}{\tan 30°}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$，

∵在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=30°$，$BC=1$，

∴ $AB=BC\times\tan 30°=1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∵ $EC=m$，

∴ $EB=m+1$，

∵在 $Rt\triangle GEB$ 中 $\angle BEG=30°$，

∴ $BG=EB\times\tan 30°=(m+1)\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}m+\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ $AG=BG-AB=\frac{\sqrt{3}}{3}m+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}m$，

∵ $\angle ABC+\angle DEF=90°+90°=180°$，

∴ $DE//GB$，

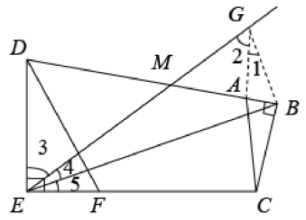
$\therefore \dfrac{AM}{DM}=\dfrac{AG}{DE}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}m}{\sqrt{3}}=\dfrac{m}{3}$.

故答案为：$\dfrac{m}{3}$.

（2）

$\dfrac{AM}{DM}=\dfrac{m}{3}$保持不变．理由如下：

过 B 点作 $BG\perp BE$，交射线 EM 于点 G，连接 AG，



$\because \angle 4=30°$，

$\therefore \dfrac{BG}{BE}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle GBA+\angle ABE=90°$，

$\because$在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=30°$，

$\therefore \dfrac{BA}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle EBC+\angle ABE=90°$，

$\therefore \dfrac{BG}{BE}=\dfrac{BA}{BC}$，$\angle GBA=\angle EBC$，

$\therefore \triangle GBA\backsim\triangle EBC$，

$\therefore AG=\dfrac{\sqrt{3}}{3}CE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}m$，$\angle 1=\angle 5$，

$\because \angle 4=30°$，

$\therefore \angle 3+\angle 5=60°$，

$\because \angle 2+\angle 1=60°$，

$\therefore \angle 3=\angle 2$，

$\therefore DE//AG$，

$\therefore \triangle AMG\backsim\triangle DME$，

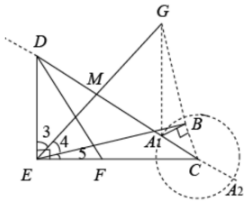
$\therefore \dfrac{AM}{DM}=\dfrac{AG}{DE}$，

∵ $AG=\frac{\sqrt{3}}{3}m$， $DE=\sqrt{3}EF=\sqrt{3}$，

∴ $\frac{AM}{DM}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}m}{\sqrt{3}}=\frac{m}{3}$；

（3）

由题意得，点 A 在以 C 为圆心，以 CA 为半径的圆上移动，如图所示：



∴当点 D、A、C 三点共线时， A_1D 是最小值， A_2D 是最大值，

∵在□DEC 中， $DE=\sqrt{3}$， $EC=m=2\sqrt{3}$，

∴ $DC=\sqrt{DE^2+EC^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{15}$，

∵在 Rt△ABC 中， $\angle ACB=30°$， $BC=1$，

∴ $AC=\frac{1}{\cos 30°}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，

∴线段 AD 的最大值为 $\sqrt{15}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$，最小值为 $\sqrt{15}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查了解直角三角形，特殊角的三角函数值，勾股定理，三角形相似的判定和性质，平行线的判定和性质，根据题意得出点 A 在以 C 为圆心，以 CA 为半径的圆上移动，当点 D、A、C 三点共线时， A_1D 是最小值， A_2D 是最大值，是解决问题的关键.

22．(1)$\sqrt{5}$

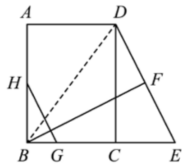
(2)见解析

【分析】（1）由垂直平分线的性质可得 $BD=BE=5$，由勾股定理可求 DC， DE 的长，即可求解；

（2）在 DC 上截取 $CN=BH$，在 CE 上截取 $CM=BG$，连接 MN．由"SAS"可得□BHG≌□CNM，可得 $MN=HG$，$\angle HGB=\angle NMC$，可证 $CM=ME$，通过证明□CMN∽□CED，

可得$\frac{CM}{CE}=\frac{MN}{DE}$，结合题意即可得出$BM=GE$，进而得出$BG=ME$，最后由三角形中位线的性质即可得出结论.

【详解】（1）解：如图，连接BD，



$\because BC=3$，$CE=2$，

$\therefore BE=5$.

$\because BF$垂直平分DE，

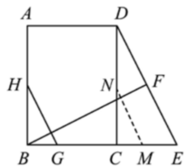
$\therefore BE=BD=5$，$DF=EF=\frac{1}{2}DE$，

$\therefore CD=\sqrt{BD^2-BC^2}=\sqrt{25-9}=4$，

$\therefore DE=\sqrt{DC^2+CE^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$，

$\therefore DF=EF=\sqrt{5}$；

（2）证明：如图，在DC上截取$CN=BH$，在CE上截取$CM=BG$，连接MN.



在$\triangle BGH$和□CMN中，$\begin{cases} BH=CN \\ \angle HBG=\angle NCM=90^\circ \\ BG=CM \end{cases}$，

$\therefore$ □$BHG\cong$□$CNM\left(\text{SAS}\right)$，

$\therefore MN=HG$，$BG=CM$，$\angle HGB=\angle NMC$，

$\therefore HG/\!/MN$.

又$\because GH/\!/DE$，

$\therefore DE/\!/MN$，

$\therefore \triangle CMN \backsim \triangle CED$，

$\therefore \frac{CM}{CE}=\frac{MN}{DE}$．

$\because GE=AD+BG$， $BM=BC+CM$，

$\therefore BM=GE$，

$\therefore BG=ME$，

$\therefore CM=ME=\frac{1}{2}CE$，

$\therefore MN=\frac{1}{2}DE$，

$\therefore MN=EF$，

$\therefore HG=EF$．

【点睛】本题考查矩形的性质，勾股定理，线段垂直平分线的性质，相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质等知识，添加恰当辅助线构造全等三角形是解题的关键．