



比统计.

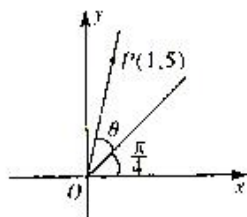


根据上图进行分析, 下列说法不正确的是 ( )

- A. 2021年中国65岁及以上人口数量为2.01亿, 同比2020年增长了约5.24%
- B. 2021年老年抚养比为21.1%, 较2020年增加了1.4%
- C. 2013—2015年的老年抚养比增速不低于2019—2021年的老年抚养比增速
- D. 2013—2021年中国65岁及以上人口数量的极差为0.68亿, 中位数为1.6亿

5. 已知角 $\theta$ 的大小如图所示, 则  $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta} =$  ( )

- A. 1
- B.  $\frac{2}{3}$
- C.  $-\frac{5}{8}$
- D.  $-\frac{5}{2}$



6. 已知  $e^a = 4$ ,  $9^b = e^2$ ,  $c = \log_3 2$ , 则 ( )

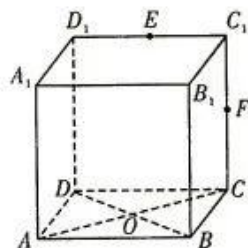
- A.  $a < b < c$
- B.  $a < c < b$
- C.  $b < a < c$
- D.  $b < c < a$

7. 已知实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \leq 0, \\ x-y+2 \leq 0, \\ 5x+y+10 \geq 0, \end{cases}$  则目标函数  $z = x - 2y$  的最大值为 ( )

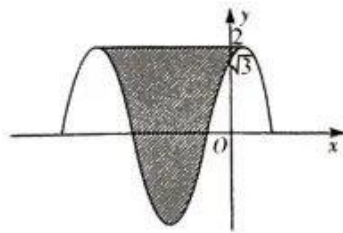
- A. -1
- B. -2
- C. -5
- D. -7

8. 如图, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为棱  $C_1D_1, CC_1$  的中点,  $O$  为正方形  $ABCD$  的对角线  $AC$  与  $BD$  的交点, 则下列结论不正确的是 ( )

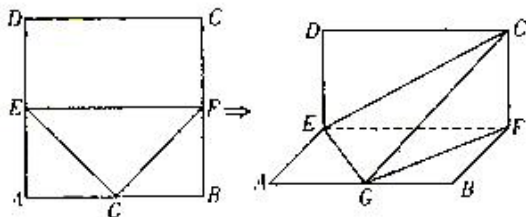
- A.  $OE \parallel$  平面  $BB_1C_1C$
- B.  $OF \parallel$  平面  $ABC_1D_1$
- C.  $DE \parallel$  平面  $AA_1C_1C$
- D.  $EF \parallel$  平面  $A_1BD$



9. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 其中阴影部分的面积为  $2\pi$ , 则函数  $f(x)$  在  $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$  上的最小值为 ( )



- A. -2  
B.  $-\sqrt{3}$   
C. -1  
D.  $\frac{1}{2}$
10. 已知抛物线  $C: x^2 = 4y$ , 过焦点  $F$  的直线  $l$  与抛物线  $C$  相交于  $A, B$  两点, 以  $AB$  为直径的圆与  $x$  轴相交于  $P, Q$  两点, 若  $\triangle FPQ$  的面积不小于 2, 则直线  $l$  的斜率  $k$  的取值范围是 ( )
- A.  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$   
B.  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$   
C.  $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$   
D.  $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$
11. 在边长为 1 的正方形  $ABCD$  中,  $E, F, G$  分别为  $AD, BC, AB$  的中点, 现将矩形  $CDEF$  沿  $EF$  折起, 使平面  $CDEF$  与平面  $ABFE$  所成的二面角为直二面角, 则四面体  $CEGF$  的外接球的表面积为 ( )



- A.  $5\pi$   
B.  $20\pi$   
C.  $40\pi$   
D.  $80\pi$
12. 已知函数  $f(x) = (2\ln x + 1)x$ , 若对任意的  $x \in (1, +\infty)$ , 不等式  $f(x) \geq k \ln x$  恒成立, 则实数  $k$  的取值范围是 ( )
- A.  $(-\infty, 4\sqrt{e}]$   
B.  $(-\infty, 4e^2]$   
C.  $(0, 4e^2]$   
D.  $[4e^2, +\infty)$

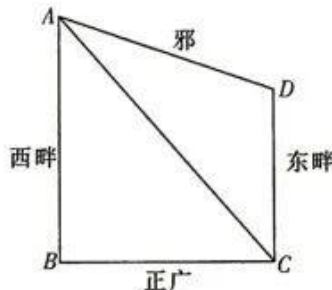
## 第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量  $a = (3-m, -1), b = (m, -4)$ , 若  $a \parallel b$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \frac{2^x + a \cdot 2^{-x}}{bx^2 + 1}$  为偶函数, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

15. 《九章算术》是中国古代第一部数学专著. 《九章算术》中的“邪田”意为直角梯形, 上、下底称为“畔”, 高称为“正广”, 非高腰边称为“邪”. 如图所示, 邪长为  $4\sqrt{3}$ , 东畔长为  $2\sqrt{7}$ , 在  $A$  处测得  $C, D$  两点处的俯角分别为  $49^\circ$  和  $19^\circ$ , 则正广长约为 \_\_\_\_\_.(注:  $\sin 41^\circ \approx 0.66$ )





16. 已知双曲线  $M: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 以线段  $F_1F_2$  为直径的圆  $O$  与双曲线  $M$  在第一象限交于点  $A$ , 若  $\tan \angle AF_2F_1 \leq 2$ , 则双曲线  $M$  的离心率的取值范围为\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

某医院为筛查某种疾病, 需要检验一项血液指标是否为阳性.

- (1) 现有 4 份血液样本, 其中有 2 份样本为阳性. 若采取逐份检验的方式, 求恰好经过 2 次检验就能把阳性样本全部找出来的概率;
- (2) 现有 200 份血液样本送检, 该医院打算分别采用甲试剂检验其中的 100 份, 采用乙试剂检验另外的 100 份, 检验结果如下表:

	使用甲试剂	使用乙试剂	合计
阴性	80	85	165
阳性	20	15	35
合计	100	100	200

根据上面的列联表判断, 是否有 90% 的把握认为检验结果与使用甲、乙试剂的选择有关.

附:

$P(K^2 \geq k_\alpha)$	0.15	0.10	0.050	0.025
$k_\alpha$	2.072	2.706	3.841	5.024

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

18. (本小题满分 12 分)

在正项数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2, \frac{a_{n+1}-3}{a_n+3} = \frac{a_n-1}{a_{n+1}+1}$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

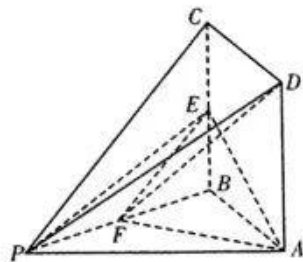
(2) 设  $b_n = \frac{1}{a_n^2 - 1}$ , 且数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 证明:  $T_n > \frac{2n-1}{4n}$ .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PB \perp AB$ ,  $AD \perp$  平面  $PAB$ ,  $BC \perp$  平面  $PAB$ ,  $E$  为  $BC$  的中点,  $F$  为  $PB$  上一点, 且  $PB=4$ ,  $AB=2$ ,  $BC=AD=2\sqrt{2}$ .

(1) 求证:  $AE \perp DF$ ;

(2) 若直线  $DF$  与平面  $PAB$  所成的角为  $45^\circ$ , 求三棱锥  $P-AEF$  的体积.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,  $M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}\right)$  为椭圆  $C$  上一点, 过焦点  $F_1$  的动直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 且右焦点  $F_2$  到直线  $l$  的最大距离为 2.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 设  $P(t, 0) (t > -1)$ , 且  $|AB| = 4|PF_1|$ , 证明:  $|PA| = |PB|$ .

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x - a(e^x - 1)$ , 其中  $e$  为自然对数的底数,  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 设  $g(x) = e^x f(x)$ , 当  $a = 1$  时, 证明: 函数  $g(x)$  有且仅有一个极小值点  $x_0$ , 且

$$-\frac{1}{4} < g(x_0) < -\frac{1}{e^2}.$$

(二)选考题:共10分.请考生在第22~23题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分10分)选修4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系  $xOy$  中,直线  $l$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x=3-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标原点

$O$  为极点, $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系,圆  $C$  的圆心为  $(3, \frac{\pi}{2})$ ,半径为 3.

(1)求直线  $l$  和圆  $C$  的极坐标方程;

(2)若直线  $l$  与圆  $C$  相交于  $A, B$  两点,求  $\sin^2 \angle OBA + \sin^2 \angle OAB$  的值.

23.(本小题满分10分)选修4-5:不等式选讲

已知函数  $f(x) = |2x-a| - |x+a| (a \in \mathbf{R})$ .

(1)当  $a=1$  时,求不等式  $f(x) > 0$  的解集;

(2)若不等式  $f(x) \geq a^2 - 3|x+a| + 2$  对任意的  $x \in \mathbf{R}$  恒成立,求实数  $a$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线