

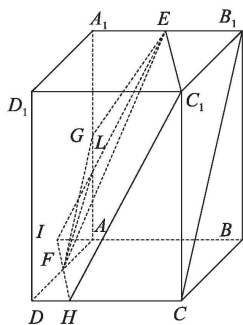
## 2023届5月质量监测考试

### 文科数学参考答案

1. D 解析:  $A = \{x | x^2 < 2\} = \{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$ ,  $B = \left\{y \mid y = \left(\frac{1}{2}\right)^x\right\} = \{y | y > 0\}$ ,  
则  $A \cup B = \{x | x > -\sqrt{2}\}$ , 故选 D.
2. C 解析: 因为  $z = 1 - i$ , 所以  $\bar{z} = 1 + i$ ,  $\frac{1+i}{z+1} = \frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ , 故选 C.
3. B 解析: 2017-2022 中国节能变频空调年产量逐年增加, A 正确; 2017-2022 中国节能变频年空调产量的中位数是  $\frac{6833.2 + 8283.2}{2} = 7558.2$ , B 错误;  
 $9586.8 \times 1.14 < 9600 \times 1.14 = 10944 < 10988.0$ , C 正确;  
2017-2022 中国节能变频空调年平均产量大于  $\frac{5000 + 6000 + 6500 + 8000 + 9500 + 10000}{6} = 7500$ ,  
D 正确, 故选 B.
4. B 解析: 因为点  $P(2\cos^2 80^\circ, \sin 20^\circ)$  在锐角  $\alpha$  终边上, 所以  $\tan \alpha = \frac{\sin 20^\circ}{2\cos^2 80^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{2\cos^2 80^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{2\cos^2 80^\circ} = \tan 80^\circ$ ,  $\alpha = 80^\circ$ , 所以  $\tan 3\alpha = \tan 240^\circ = \sqrt{3}$ , 故选 B.
5. A 解析: 由  $|OF| = |OA|$  可得  $AF \perp BF$ , 设点 A 在 C 的右支上,  $|AF| = m, |BF| = n$ , 则  $m - n = 4, m^2 + n^2 = 20$ , 所以  $|AF| \cdot |BF| = \frac{1}{2}[m^2 + n^2 - (m - n)^2] = 2$ , 故选 A.
6. B 解析: 因为  $a, b$  均为单位向量,  $|a - kb| = \sqrt{3a \cdot b}$  两边平方得  $1 + k^2 - 2ka \cdot b = 3a \cdot b$ , 且  $a \cdot b \geq 0$ ,  
所以  $a \cdot b = \frac{k^2 + 1}{2k + 3}$ , 由  $0 \leq \frac{k^2 + 1}{2k + 3} \leq 1$  得, 4 个选项中只有  $k = 2$  满足条件, 故选 B.
7. D 解析: 当该陀螺中圆锥的顶点及圆柱的下底面圆周都在球形材料表面上时, 球形材料的体积最小, 设此时球形材料的半径为 R, 由题意得  $(2 - R)^2 + 1^2 = R^2$ , 所以  $R = \frac{5}{4}$ , 所以球形材料体积的最小值为  $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{125\pi}{48}$ , 故选 D.
8. A 解析: 因为点  $P(a, b)$  在第一象限且在直线  $4x + y - 1 = 0$  的左下方, 所以  $a > 0, b > 0$ , 且  $4a + b < 1, a + b \geq kab$  恒成立即  $\frac{a+b}{ab} \geq k$  恒成立, 因为  $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > (4a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 9$ , 所以  $k \leq 9$ , 所以  $0 < k \leq 9$  是  $a + b \geq kab$  恒成立的充分不必要条件, 故选 A.
9. C 解析: 由题设得  $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x + 2ax - 2$ , 设过原点的切线与曲线  $f(x)$  在  $x = t (t \neq 0)$  处相切, 则切线斜率  $k = (t^2 + 2t)e^t + 2at - 2 = \frac{t^2 e^t + at^2 - 2t}{t}$ , 整理得  $a = -(t+1)e^t$ , 设  $g(t) = -(t+1)e^t$ , 则  $g'(t) = -(t+2)e^t$ , 所以  $g(t)$  在  $(-\infty, -2)$  上单调递增, 且  $g(t)$  在  $(-\infty, -2)$  上的取值范围是  $(0, e^{-2})$ ,  $g(t)$  在  $(-2, +\infty)$  上单调递减, 且  $g(t)$  在  $(-2, +\infty)$  上的取值范围是

- $(-\infty, -1) \cup (-1, e^{-2})$ , 所以, 当  $0 < a < e^{-2}$  时, 过原点与曲线  $f(x) = x^2 e^x + ax^2 - 2x$  相切的直线有 2 条, 故选 C.
10. D 解析: 方程  $f(x) = \sqrt{3}$  在  $(0, +\infty)$  上的前 6 个实根依次为  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}$ , 所以  $\frac{13\pi}{6} < m \leq \frac{7\pi}{3}$ , 故选 D.
11. B 解析: 因为  $a = \log_3 5 = \frac{1}{2} \log_3 25 < \frac{1}{2} \log_3 27 = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{3}{4} = \left(\frac{81}{256}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{81}{243}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ , 所以  $b = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} > \frac{3}{2}$ , 且  $b < 2$ ,  $c = 3 \log_7 2 + \log_8 7 = \log_7 8 + \log_8 7 > 2$ , 所以  $c > b > a$ , 故选 B.
12. D 解析: 因为  $\frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ , 所以  $y = \frac{x+1}{2x-1}$  的图象可由奇函数  $y = \frac{3}{4x}$  的图象向右平移  $\frac{1}{2}$  个单位, 再向上平移  $\frac{1}{2}$  个单位得到, 所以  $y = \frac{x+1}{2x-1}$  的图象关于点  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  对称, 所以椭圆 C 经过  $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , 代入 C 的方程得  $\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$ , 即  $a^2 + b^2 = 4a^2 b^2$ , 即  $2a^2 - c^2 = 4a^2(a^2 - c^2)$ , 所以  $4a^2 = \frac{2a^2 - c^2}{a^2 - c^2} = \frac{2 - e^2}{1 - e^2}$ , 由题意知  $2a > 2$ , 所以  $\frac{2 - e^2}{1 - e^2} > 4$ , 解得  $e^2 > \frac{2}{3}$ ,  $\frac{\sqrt{6}}{3} < e < 1$ , 故选 D.
13.  $\frac{17}{16}$  解析: 因为  $f(x)$  为偶函数, 且  $x \in [-1, 1]$  时  $f(x) = \log_2(2^x + 1) + (x + a)^2$ , 所以  $f(1) - f(-1) = \log_2 3 + (1 + a)^2 - \log_2 \frac{3}{2} - (1 - a)^2 = 1 + 4a = 0$ ,  $a = -\frac{1}{4}$ , 又  $f(x+2) = f(x)$ , 所以  $f(2022) = f(0) = \log_2 2 + \left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$ .
14.  $(x-3)^2 + y^2 = 9$  解析: 设  $C(a, 0)$ , 则圆 C 半径  $r = |OC| = |a|$ , 点 C 到直线  $y = x - 2$  的距离  $d = \frac{|a-2|}{\sqrt{2}}$ , 因为圆 C 被  $y = x - 2$  截得的弦长为  $\sqrt{34}$ , 所以  $d^2 + \left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2 = r^2$ , 即  $\frac{(a-2)^2}{2} + \left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2 = a^2$ , 整理得  $a^2 + 4a - 21 = 0$ , 解得  $a = 3$  或  $a = -7$  (舍), 所以 C 的标准方程为  $(x-3)^2 + y^2 = 9$ .
15.  $\frac{10}{3}$  解析: 由  $AB = 4, BC = 5, CA = 6$ , 得  $\cos C = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4}$ ,  $\cos \angle ABC = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{8}$ ,  $\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = 2 \times \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}$ , 所以  $\angle ABC = 2C$ , 因为 BD 为  $\angle ABC$  平分线, 所以  $C = \angle DBC$ ,  $\sin \angle BDC = \sin(\pi - 2C) = \sin 2C$ , 在  $\triangle BCD$  中由正弦定理得  $\frac{5}{\sin 2C} = \frac{BD}{\sin C}$ , 所以  $BD = \frac{5}{2 \cos C} = \frac{10}{3}$ .
16.  $8\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$  解析: 取  $AA_1$  中点 G, 连接 EG, FG, 则  $\angle EFG$  就是直线  $B_1C$  与直线 EF 所成角, 设  $AA_1 = 2t$ , 则  $EG^2 = FG^2 = t^2 + 4$ ,  $EF^2 = 4t^2 + 8$ , 所以  $\cos \angle EFG = \frac{\frac{1}{2} EF}{FG} = \frac{\sqrt{t^2 + 2}}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{\sqrt{143}}{13}$ , 解得  $t = 3$ , 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》  
过点 F 作  $EC_1$  的平行线与 CD 交于点 H, 则  $C_1H$  为平面  $EFC_1$  与侧面  $CDD_1C_1$  交线,  $CH = 3$ ,  $C_1H = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ , 延长 HF 与 BA 延长线交于点 I, 连接 EI, 与  $AA_1$  交于点 L, 则 EL, FL 分别为平面  $EFC_1$  与侧面  $ABB_1A_1, ADD_1A_1$  的交线,  $AL = \frac{1}{3} AA_1 = 2$ ,  $EL = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ,  $FL =$

$\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ , 又因为  $C_1E = 2\sqrt{5}$ ,  $FH = \sqrt{5}$ , 所以截面周长为  $C_1E + EL + LF + FH + HC_1 = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 8\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ .



17. (12分)

解: (1) 由  $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_4 + a_5}{2}$ , 得  $3a_1 + 3d = \frac{2a_1 + 7d}{2}$ , 所以  $d = 4a_1$ , (2分)

由  $a_1, a_2, 2a_4 - 1$  成等比数列得  $a_1(2a_4 - 1) = a_2^2$ ,

即  $a_1(2a_1 + 6d - 1) = (a_1 + d)^2$ , 把  $d = 4a_1$  代入得  $a_1^2 - a_1 = 0$ , (4分)

因为  $d \neq 0$ , 所以  $a_1 \neq 0$ , 所以  $a_1 = 1, d = 4, a_n = a_1 + (n - 1)d = 4n - 3$ . (6分)

(2) 若选①,

因为  $b_n = a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_{2n+1} = (a_{2n-1} - a_{2n+1})a_{2n} = -8a_{2n} = -8(8n - 3)$ , (8分)

所以  $S_n = -8[5 + 13 + 21 + \dots + (8n - 3)] = -\frac{8(5 + 8n - 3)n}{2} = -32n^2 - 8n$ , (10分)

$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{-32(2n)^2 - 8(2n)}{-32n^2 - 8n} = \frac{16n + 2}{4n + 1} = 4 - \frac{2}{4n + 1} < 4$ ,

所以正整数  $k$  的最小值为 4. (12分)

若选②,

$b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(4n - 3)(4n + 1)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4n - 3} - \frac{1}{4n + 1} \right)$ , (8分)

所以  $S_n = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n - 3} - \frac{1}{4n + 1} \right) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{4n + 1} \right) = \frac{n}{4n + 1}$ . (10分)

所以  $\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\frac{2n}{4n + 1}}{\frac{n}{4n + 1}} = 1 + \frac{1}{8n + 1} < 2$ ,

所以正整数  $k$  的最小值为 2. (12分)

18. (12分)

解: (1) 因为三棱柱  $DBE - A_1B_1C_1$  是直三棱柱,

所以  $BB_1 \perp$  平面  $BDE$ ,

因为  $BE \subset$  平面  $BDE$ , 所以  $BB_1 \perp BE$ , (1分)

由  $AB = BC = \sqrt{3}, AC = 3$ , 点  $D, E$  在棱  $AC$  上, 且  $AD = DE = EC$ ,

可得  $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}, \angle BAC = \angle BCA = \angle ABD = \angle CBE = \frac{\pi}{6}, \angle DBE = \frac{\pi}{3}$ ,

$AD = DE = EC = BD = BE = 1$ ,

所以  $\angle ABE = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, BE \perp AB$ ,

因为  $AB \cap BB_1 = B$ , 所以  $BE \perp$  平面  $ABB_1$ , (3分)

因为  $BE \subset$  平面  $A_1BE$ ,

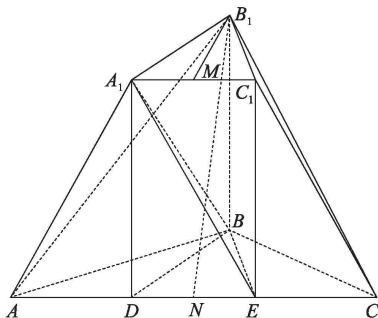
所以平面  $A_1BE \perp$  平面  $ABB_1$ . (5分)

(2) 如图, 取  $A_1C_1$  中点  $M$ ,  $DE$  中点  $N$ , 连接  $B_1M$ ,  $B_1N$ , 设  $A_1$  到面  $AB_1C$  的距离为  $d$ ,

因为  $AB_1 = CB_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 2^2} = \sqrt{7}$ , 所以  $B_1N = \sqrt{\sqrt{7}^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$ .

因为面  $A_1B_1C_1 \perp$  面  $A_1AC$ ,  $B_1M \perp A_1C_1$ , 所以  $B_1M \perp$  面  $A_1AC$ ,

$V_{A_1-AB_1C} = V_{B_1-A_1AC}$ ,  $\frac{1}{3}S_{\Delta AB_1C} \cdot d = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta A_1AC} \cdot B_1M$ , 所以  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{19}}{2} \times d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 所以  $d = \frac{2\sqrt{57}}{19}$ , 所以点  $A_1$  到平面  $AB_1C$  的距离为  $\frac{2\sqrt{57}}{19}$ . (12分)



19. (12分)

解: (1)  $y = a \cdot b^x$  两边同时取自然对数得  $\ln y = \ln(a \cdot b^x) = \ln a + x \ln b$ .

设  $\ln y = v$ , 所以  $v = \ln a + x \ln b$ , (2分)

因为  $\bar{x} = 3$ ,  $\bar{v} = 0.84$ ,  $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55$ ,

所以  $\ln b = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i - 5 \bar{x} \bar{v}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{15.99 - 5 \times 3 \times 0.84}{55 - 5 \times 3^2} = 0.339$ . (4分)

把  $(3, 0.84)$  代入  $\bar{v} = \ln a + \bar{x} \ln b$ , 得  $\ln a = -0.177$ , (5分)

所以  $\hat{v} = -0.177 + 0.339x$ ,  $\ln \hat{y} = -0.177 + 0.339x$ , (6分)

所以  $\hat{y} = e^{-0.177 + 0.339x}$ ,

即  $y$  关于  $x$  的回归方程为  $\hat{y} = e^{-0.177 + 0.339x}$ . (7分)

(2) 把 1.12, 1.68, 2.45, 3.35, 4.32 分别记作  $a, b, c, d, e$ , 从中任取两个,

结果有:  $ab, ac, ad, ae, bc, bd, de, cd, ce, de$ , 共 10 种, (9分)

数据 1.12, 1.68, 2.45, 3.35, 4.32 只有相邻两个数差的绝对值不大于 1,

所以符合条件的结果有:  $ab, bc, cd, de$ , 共 4 种, (10分)

所以这 2 个数据差的绝对值不大于 1 的概率  $P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ . (12分)

20. (12分)

解: (1) 由题意得直线  $l$  的方程为  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - t)$ , 即  $x = \sqrt{3}y + t$ , 设  $N(m, n)$ ,

与  $y^2 = 2px$  联立得  $y^2 - 2\sqrt{3}py - 2pt = 0$ ,

因为直线  $l$  与  $C$  相切, 所以  $(-2\sqrt{3}p)^2 + 8pt = 0$ ,

整理得  $3p + 2t = 0$ , 且  $n = \sqrt{3}p$ ,  $m = \frac{(\sqrt{3}p)^2}{2p} = \frac{3p}{2}$ ,

因为  $|MN| = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \left| \frac{3p}{2} - t \right| = 4\sqrt{3}$ , 所以  $\frac{3p}{2} - t = 6$ ,

$$\text{由} \begin{cases} 3p + 2t = 0 \\ \frac{3p}{2} - t = 6 \end{cases} \text{得 } p = 2,$$

所以  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ . (5分)

(2) 由 (1) 得  $N(3, 2\sqrt{3})$ ,

点  $Q$  关于  $l'$  的对称点  $Q'$  恒与  $P, N$  共线, 则直线  $NP, NQ$  关于  $l'$  对称, (6分)

设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ,

设直线  $PQ$  方程为  $x = -\sqrt{3}y + b$ , 与  $y^2 = 4x$  联立得  $y^2 + 4\sqrt{3}y - 4b = 0$ ,

$$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 + 16b > 0, b > -3,$$

$$y_1 + y_2 = -4\sqrt{3}, y_1 y_2 = -4b, \text{ (8分)}$$

$$\text{所以直线 } PN \text{ 斜率 } k_1 = \frac{y_1 - 2\sqrt{3}}{x_1 - 3} = \frac{y_1 - 2\sqrt{3}}{\frac{y_1^2}{4} - 3} = \frac{4}{y_1 + 2\sqrt{3}},$$

$$\text{直线 } QN \text{ 斜率 } k_2 = \frac{y_2 - 2\sqrt{3}}{x_2 - 3} = \frac{y_2 - 2\sqrt{3}}{\frac{y_2^2}{4} - 3} = \frac{4}{y_2 + 2\sqrt{3}}, \text{ (10分)}$$

$$k_1 + k_2 = \frac{4}{y_1 + 2\sqrt{3}} + \frac{4}{y_2 + 2\sqrt{3}} = \frac{4(y_1 + y_2) + 16\sqrt{3}}{(y_1 + 2\sqrt{3})(y_2 + 2\sqrt{3})} = \frac{-16\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{(y_1 + 2\sqrt{3})(y_2 + 2\sqrt{3})} = 0,$$

所以直线  $NP, NQ$  关于  $x = 3$  或  $y = 2\sqrt{3}$  对称,

所以存在直线  $l'$ , 使得点  $Q$  关于  $l'$  的对称点  $Q'$  恒与  $P, N$  共线, 且  $l'$  的方程为  $x = 3$  或  $y = 2\sqrt{3}$ . (12分)

21. (12分)

解: (1) 因为  $f(x) = \ln x + \frac{2a^2 + 8}{a\sqrt{x}} - \frac{4}{x} - 2$ ,

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1}{x} - \left(a + \frac{4}{a}\right) \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{4}{x^2} = \frac{x - \left(a + \frac{4}{a}\right)\sqrt{x} + 4}{x^2} = \frac{(\sqrt{x} - a)\left(\sqrt{x} - \frac{4}{a}\right)}{x^2}, \text{ (1分)}$$

若  $a < 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, (2分)

若  $a = 2$ ,  $f'(x) = \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{x^2} \geq 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, (3分)

若  $0 < a < 2$ ,  $a < \frac{4}{a}$ ,  $a^2 < \frac{16}{a^2}$ ,  $x \in \left(a^2, \frac{16}{a^2}\right)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,  $x \in (0, a^2)$  或

$x \in \left(\frac{16}{a^2}, +\infty\right)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增, (4分)

若  $a > 2$ ,  $a > \frac{4}{a}$ ,  $a^2 > \frac{16}{a^2}$ ,  $x \in \left(\frac{16}{a^2}, a^2\right)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,  $x \in \left(0, \frac{16}{a^2}\right)$  或

$x \in (a^2, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增. (5分)

综上, 得  $a < 0$  或  $a = 2$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $0 < a < 2$  时,  $f(x)$  在  $(a^2, \frac{16}{a^2})$  上单调递减, 在  $(0, a^2)$  或  $(\frac{16}{a^2}, +\infty)$  上单调递增,  $a > 2$  时,  $f(x)$  在  $(\frac{16}{a^2}, a^2)$  上单调递减, 在  $(0, \frac{16}{a^2})$  或  $(a^2, +\infty)$  上单调递增. (6分)

(2) 由 (1) 得, 当  $0 < a < 2$  时,  $f(x)$  在  $(0, a^2)$  上单调递增, 在  $(a^2, \frac{16}{a^2})$  上单调递减, 在  $(\frac{16}{a^2}, +\infty)$  上单调递增, (7分)

因为  $f(\frac{16}{a^2}) = \ln \frac{16}{a^2} + \frac{a^2}{4} > 0$ , 所以  $f(a^2) > 0$ .

又因为  $f(\frac{a^2}{16}) = \ln \frac{a^2}{16} + \frac{8(a^2 - 4)}{a^2} - 2 < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(\frac{a^2}{16}, a^2)$  有 1 个零点,

所以  $0 < a < 2$  时,  $f(x)$  有唯一零点. (12分)

22. (10分)

解: (1) 由  $x = \sqrt{1-t} + \sqrt{1+t}$  得  $x^2 = 2 + 2\sqrt{1-t^2}$ ,

由  $y = \sqrt{1-t} - \sqrt{1+t}$  得  $y^2 = 2 - 2\sqrt{1-t^2}$ ,

所以  $x^2 + y^2 = 4$ , (2分)

因为  $2 \leq 2 + 2\sqrt{1-t^2} \leq 4$ , 且  $x = \sqrt{1-t} + \sqrt{1+t} > 0$ , 所以  $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ ,

所以  $C_1$  的直角坐标方程  $x^2 + y^2 = 4 (\sqrt{2} \leq x \leq 2)$ , (3分)

由  $\rho^2 - 2\rho \sin \theta + 1 = a$  及  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $\rho \sin \theta = y$  得,

$C_2$  的普通方程为  $x^2 + y^2 - 2y + 1 = a$  即  $x^2 + (y-1)^2 = a$ . (5分)

(2) 曲线  $C_1$  是圆  $x^2 + y^2 = 4$  上以  $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  为端点的一段劣弧, (6分)

曲线  $C_2$  是以  $(0, 1)$  为圆心, 半径为  $\sqrt{a}$  的圆, (7分)

设曲线  $C_1$  上任一点坐标为  $P(x_0, y_0)$ ,

$|PC_2|^2 = x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 1 = 5 - 2y_0$ ,

又因为  $y_0 \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  所以  $|PC_2|^2 \in [5 - 2\sqrt{2}, 5 + 2\sqrt{2}]$ .

因为  $C_1, C_2$  没有公共点, 所以  $a$  的取值范围是  $(0, 5 - 2\sqrt{2}) \cup (5 + 2\sqrt{2}, +\infty)$ . (10分)

23. (10分)

解: (1) 当  $x < 0$  时,  $f(x) > |x|$  等价于  $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases}$ , 解得  $x < -3$ , (1分)

当  $0 \leq x \leq 3$  时,  $f(x) > |x|$  等价于  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases}$ , 解得  $\sqrt{3} < x \leq 3$ , (2分)

当  $x > 3$  时,  $f(x) > |x|$  等价于  $\begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 2x + 3 > 0 \end{cases}$ , 解得  $x > 3$ , (4分)

综上得,  $f(x) > |x|$  的解集为  $(-\infty, -3) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ . (5分)

(2) 若对  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) > x^2 - 2 - |x - a|$ ,

即  $|x - 3| - |x - a| < 2$  对  $\forall x \in \mathbf{R}$  恒成立, (6分)

因为  $|x - 3| - |x - a| \leq |(x - 3) - (x - a)| = |a - 3|$ , (8分)

所以  $|a - 3| < 2$ ,  $-2 < a - 3 < 2$ ,  $1 < a < 5$ ,

所以  $a$  的取值范围是  $(1, 5)$ . (10分)



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

