中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 9 月测试

文科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	D	B	A	A	B	B	A	D	D	D	C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　14. -3　　15. 2　　16. 4

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（12 分）

（1）解：根据表中数据可知，调查的 500 位居民中有 70 位有疾病 A 病历，

因此该地区居民中，有疾病 A 病历的比例值为 $\dfrac{70}{500}=14\%$；

所以估计该地区居民中，有疾病 A 病例人的比例为 14% ……………………4 分

（2）$K^2=\dfrac{500\times(40\times270-30\times160)^2}{200\times300\times70\times430}\approx9.967$， ……………………8 分

由于 $9.967>6.635$，

所以有 99% 的把握认为患有疾病 A 与有生活习惯 B 相关．……………………12 分

18．（12 分）

（1）解：因为 a_1,a_3,a_4 成等比数列，所以 $a_4=\dfrac{a_3^2}{a_1}$， ……………………2 分

因为 $a_1=1$，$a_{n+2}=a_n+2$

所以 $a_3=a_1+2=3$，$a_4=\dfrac{a_3^2}{a_1}=9$，$a_2=a_4-2=7$． ……………………4 分

（2）因为 $a_1=1$，$a_{n+2}=a_n+2$，

所以 $a_{2n-1}=a_1+2(n-1)=2n-1$，$a_{2n+1}=2n+1$， ……………………7 分

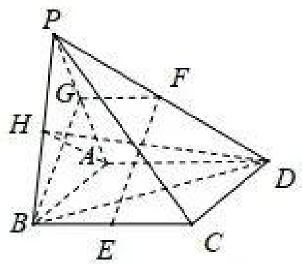
所以 $b_n=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$， ……………………………… 10 分

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$=1-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}$． ……………………………… 12 分

19.（12 分）



（1）证明：取 PA 中点 G，

因为 E、F 分别为 BC、PD 中点，$ABCD$ 是平行四边形，

所以 $GF\,//\,BE$，且 $GF=BE$

所以 $BEFG$ 是平行四边形

所以 $EF\,//\,BG$， ……………………………… 2 分

因为 $EF\not\subset$ 平面 PAB，$BG\subset$ 平面 PAB

所以 $EF\,//$ 平面 PAB． ……………………………… 4 分

（2）因为 $EF\,//\,BG$，$AD\perp EF$，

所以 $AD\perp BG$，

因为 $AD\perp PA$，所以 $AD\perp$ 平面 PAB． ……………………………… 6 分

取 PB 中点 H，因为 $PA=AB$，

所以 $AH\perp PB$，

因为 $AD\perp$ 平面 PAB，所以 $AD\perp PB$

进而 $PB\perp$ 平面 ADH，所以 $DH\perp PB$， ……………………………… 8 分

所以 $\angle DHA$ 是二面角 $D-PB-A$ 的平面角． ……………………………… 10 分

设 $PA=BA=DA=2a$，因为 $\angle PAB=60°$

所以 $AH=\sqrt{3}a$，来源微信公众号：高三答案

所以 $\tan\angle DHA=\dfrac{DA}{AH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$． ……………………………… 12 分

20.（12 分）

（1）解：由已知$\triangle AFB$是等边三角形，

因为$AB=2$，$AF=a$，……………………2 分

所以$a=2$，

得椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．……………………4 分

（2）设$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

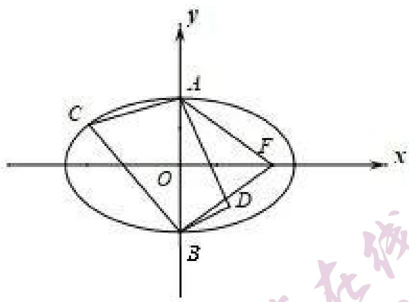
因为$CA\perp AD$，$CB\perp BD$，

所以$x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=0$，$x_1x_2+(y_1+1)(y_2+1)=0$，……………………6 分

两式相减得$y_2=-y_1$，……………………8 分

带回原式得$x_1x_2+1-y_1^2=0$，

因为$\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$．所以$x_2=-\dfrac{x_1}{4}$，------------10 分



$S_{\square CADB}=S_{\triangle CAB}+S_{\triangle DAB}$

$=|x_1|+|x_2|=\left(1+\dfrac{1}{4}\right)|x_1|\le\dfrac{5}{2}$（当$x_1=\pm2$时取等）

所以四边形$CADB$面积S的最大值为$\dfrac{5}{2}$．……………………12 分

21.（12 分）

（1）解：$f(x)=\dfrac{e^x}{x}-x+\ln x$，$f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}-1+\dfrac{1}{x}$，……………………2 分

$f(1)=e-1$，$f'(1)=0$，

所以曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=e-1$．……………………4 分

（2）$f'(x)=a\cdot\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}-1+\dfrac{1}{x}=\left(a\cdot\dfrac{e^x}{x}-1\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$，……………………6 分

若$a\le0$，则当$x\in(0,1]$时，$f'(x)\ge0$，当$x\in[1,+\infty)$时，$f'(x)\le0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上递增，在 $[1,+\infty)$ 上递减，

当 $0<k<1$ 时，令 $x_1=1$，因为当 $x\neq 1$ 时，$f(x)<f(1)$，

所以不存在 x_2，使得 $f(x_1)<f(x_2)$

当 $k\geq 1$ 时，$f(x)$ 在 $[k,+\infty)$ 上递减，令 $x_1=k$，则不存在 x_2，使得 $f(x_1)<f(x_2)$

所以，$a\leq 0$ 不满足题意．……………………………………………………8 分

下面证明 $a>0$ 都满足题意．

设 $g(x)=a\cdot\dfrac{e^x}{x}-1$，则 $g'(x)=\dfrac{a\cdot e^x(x-1)}{x^2}$，

因为当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数．

若 $a\geq\dfrac{1}{e}$，则当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>g(1)=ae-1\geq 0$，

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)=\left(a\cdot\dfrac{e^x}{x}-1\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)>0$

进而函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增，取 $k=1$，满足题意．……………………………10 分

若 $0<a<\dfrac{1}{e}$，则 $g(1)=ae-1<0$，而当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

所以存在 $x_0\in(1,+\infty)$，使得 $g(x_0)=0$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)=\left(a\cdot\dfrac{e^x}{x}-1\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)>0$

进而函数 $f(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上递增，取 $k=x_0$，满足题意．

综上，实数 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$ ……………………………………………12 分

22．（10 分）

（1）解：因为 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，……………………………………2 分

所以曲线 Γ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-1=0$．……………………………4 分

（2）设 $P(x,y)$，$Q(x_1,y_1)$

因为$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{MQ}$，所以$\begin{cases}x=\lambda(x_1-1)\\ y=\lambda y_1\end{cases}$. ……6 分

因为点Q为曲线Γ上，所以$(x_1-1)^2+y_1^2=2$

所以曲线C的方程为$x^2+y^2=2\lambda^2$. ……8 分

直线l的普通方程$x+y=3$ 来源微信公众号：高三答案

因为直线l与曲线C相切，所以$\sqrt{2}\lambda=\frac{3}{\sqrt{2}}$，得$\lambda=\frac{3}{2}$. ……10 分

23.（10 分）

（1）解：$f(x)=|2x+1|+|x|$

当$x\geq 0$时，$f(x)=3x+1\geq 2$，解得$x\geq\frac{1}{3}$，

当$-\frac{1}{2}\leq x<0$时，$f(x)=x+1\geq 2$，解得$x\in\varnothing$，……2 分

当$x<-\frac{1}{2}$时，$f(x)=-3x-1\geq 2$，解得$x\leq -1$，

所以不等式$f(x)\geq 2$的解集为$(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$. ……4 分

（2）因为$a^2>-\frac{1+a}{2}$

所以$f(x)=\begin{cases}3x+1+a-a^2, x\geq a^2\\ x+1+a+a^2, -\frac{1+a}{2}\leq x<a^2\\ -3x-1-a+a^2, x<-\frac{1+a}{2}\end{cases}$ ……6 分

所以函数$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{1+a}{2}\right]$上递减，在$\left[-\frac{1+a}{2},+\infty\right)$上递增，

所以函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上的最小值为$f\left(-\frac{1+a}{2}\right)=a^2+\frac{1+a}{2}$. ……8 分

所以$a^2+\frac{1+a}{2}\geq 2$，解得$a\leq -\frac{3}{2}$或$a\geq 1$. ……10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。