湖南师大附中2022—2023学年度高二第二学期第二次大练习

数学参考答案

一、选择题：本大题共8个小题，每小题5分，满分40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	B	D	B	D	C	D

1.B **【解析】**由题意得：全称量词命题的否定为存在量词命题，

故命题"$\forall x\in\mathbf{R},\ln(x^2+1)>0$"的否定为"$\exists x\in\mathbf{R},\ln(x^2+1)\leqslant 0$". 故选B.

2.A **【分析】**根据$A=B$，可得两集合元素全部相等，分别求$\begin{cases}a^2=1,\\ab=b\end{cases}$和$\begin{cases}a^2=b,\\ab=1,\end{cases}$再根据集合元素的互异性可确定$a,b$的值，进而得出答案.

【解析】由题意$A=B$可知，两集合元素全部相等，得到$\begin{cases}a^2=1,\\ab=b\end{cases}$或$\begin{cases}a^2=b,\\ab=1,\end{cases}$又根据集合互异性，可知$a\neq1$，解得$\begin{cases}a=-1,\\b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=1,\\b=1\end{cases}$（舍），所以$a=-1,b=0,a+b=-1$，

故选A.

3.B **【分析】**根据充分性、必要性的定义判断命题间的推出关系，即可得答案.

【解析】对于命题p，$x=1$为方程的根，则$a+b+c=0$，充分性成立；

对于命题q，$a+b+c=0$且$a\neq0$，则$x=1$必是题设方程的一个根，必要性成立；

所以p是q的充分必要条件.

故选：B.

4.D **【分析】**根据平面向量共线定理得存在实数λ，使$\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$，代入条件列式计算即可.

【解析】若向量$\boldsymbol{m}=-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2(k\in\mathbf{R})$与向量$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$共线，

则存在实数λ，使$\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$，

$\therefore -\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1)=-2\lambda\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$，

$\therefore\begin{cases}-1=-2\lambda,\\k=\lambda,\end{cases}$

解得$k=\dfrac{1}{2}$.

故选D.

5.B **【分析】**依题意可得$\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{x}=1$，再利用乘"1"法及基本不等式求出$x+\dfrac{y}{4}$的最小值，即可得到$m^2+3m>4$，解一元二次不等式即可.

【解析】因为$x>0,y>0$且$4x+y=xy$，所以$\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{x}=1$，

所以$x+\dfrac{y}{4}=\left(x+\dfrac{y}{4}\right)\cdot\left(\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{x}\right)=2+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{y}{4x}\geqslant2+2\sqrt{\dfrac{4x}{y}\cdot\dfrac{y}{4x}}=4$，

当且仅当$\dfrac{4x}{y}=\dfrac{y}{4x}$，即$y=4x=8$时等号成立，

所以$m^2+3m>4$，即$(m+4)(m-1)>0$，解得$m<-4$或$m>1$，

所以m的取值范围是$(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$.

故选B.

6.D **【解析】**因为$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$，

所以$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{3}{8}$.

又$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt2}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\dfrac{\sqrt2}{4}$，

所以$\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{7}{8}$，

故 $\tan^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{7}$.

所以$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\tan^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{3}{8}\times7=\frac{21}{8}$.

故选:D.

7. C 【分析】设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,利用导数得出其在$[\mathrm{e},+\infty)$上单调递减,从而可得 $f(\mathrm{e})>f(3)>f(8)$,由此得出答案.

【解析】$a=\ln\sqrt[3]{3}=\frac{\ln 3}{3}$,$b=\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$,$c=\frac{\ln 8}{8}$,

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

$\therefore x\geqslant \mathrm{e}$ 时,$f'(x)\leqslant0$,则 $f(x)$在$[\mathrm{e},+\infty)$上单调递减,

$\therefore f(\mathrm{e})>f(3)>f(8)$,即$\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}>\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 8}{8}$,

$\therefore b>a>c$.

故选:C.

8. D 【解析】若 $a=0$,则 $b=-c$,$f(0)\cdot f(1)=c(3a+2b+c)=-c^2\leqslant0$,与已知矛盾,$\therefore a\neq0$. 故 A 正确;

方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$,

由条件 $a+b+c=0$ 且 $a\neq0$,消去 b,得 $\Delta=4(a^2+c^2-ac)=4\left[\left(a-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right]>0$,故方程 $f(x)=0$ 有实根.

由 $f(0)\cdot f(1)>0$,得 $c(3a+2b+c)>0$,由条件 $a+b+c=0$ 消去 c,得$(a+b)(2a+b)<0$,

故$-2<\frac{b}{a}<-1$. 故 B 正确;

由条件知 $x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}$,$x_1x_2=\frac{c}{3a}=-\frac{a+b}{3a}$,$\therefore(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4}{9}\left(\frac{b}{a}+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{3}$.

$\because -2<\frac{b}{a}<-1$,所以$\frac{1}{3}\leqslant(x_1-x_2)^2<\frac{4}{9}$,故$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|x_1-x_2|<\frac{2}{3}$. 故 C 正确;

抛物线 $f(x)=3ax^2+2bx+c$ 的顶点坐标为$\left(-\frac{b}{3a},\frac{3ac-b^2}{3a}\right)$,又$-2<\frac{b}{a}<-1\Rightarrow\frac{1}{3}<-\frac{b}{3a}<\frac{2}{3}$.

又因为当$\begin{cases}f(0)<0,\\f(1)<0\end{cases}$时,有$\begin{cases}c<0,\\3a+2b+c<0,\\a+b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c<0,\\a<c.\end{cases}$

此时,抛物线开口向下,$f\left(-\frac{b}{3a}\right)=-\frac{a^2+c^2-ac}{3a}>0$,所以方程 $f(x)=0$ 在区间$\left(0,-\frac{b}{3a}\right)$与$\left(-\frac{b}{3a},1\right)$内分别有一实根;当 $f(0)>0$,$f(1)>0$ 时,同样有 $f\left(-\frac{b}{3a}\right)=-\frac{a^2+c^2-ac}{3a}<0$,所以方程 $f(x)=0$ 在区间$\left(0,-\frac{b}{3a}\right)$与$\left(-\frac{b}{3a},1\right)$内分别有一实根. 故方程 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内有两个不相等的实根. 故 D 不正确.

故选:D.

二、选择题:本大题共 4 个小题,每小题 5 分,满分 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

题 号	9	10	11	12
答 案	BD	AC	ACD	BC

9. BD 【分析】根据不等式的性质结合作差法逐项判断即可.

【解析】对于 A 项,$ac^2-bc^2=c^2(a-b)$,因为 $b<a<0$,所以 $a-b>0$,又 $c^2\geqslant0$,

所以 $c^2(a-b)\geqslant0$,即:$b\cdot c^2\leqslant a\cdot c^2$,故 A 项错误;

对于 B 项,$\frac{c}{a}-\frac{c}{b}=\frac{c(b-a)}{ab}$,因为 $b>a>0>c$,所以 $c(b-a)<0$,$ab>0$,所以$\frac{c}{a}-\frac{c}{b}=\frac{c(b-a)}{ab}<0$,即:$\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$,

故 B 项正确;

对于 C 项，$\frac{a}{c-a}-\frac{b}{c-b}=\frac{c(a-b)}{(c-a)(c-b)}$，因为 $c>b>a>0$，所以 $c-a>0$，$c-b>0$，$a-b<0$，

所以$\frac{a}{c-a}-\frac{b}{c-b}=\frac{c(a-b)}{(c-a)(c-b)}<0$，即：$\frac{a}{c-a}<\frac{b}{c-b}$，故 C 项错误；

对于 D 项，因为$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}=\frac{(a-b)c}{b(b+c)}$，

又因为 $a>b>c>0$，所以 $a-b>0$，$b+c>0$，

所以$\frac{(a-b)c}{b(b+c)}>0$，即：$\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$，故 D 项正确.

故选：BD.

10. AC 【分析】A 项由图象可求得 T，从而求出 ω，再将$\left(\frac{\pi}{6},2\right)$代入可求得 φ，最后代入出解析式即可判断；B 项先求出 $f(x)$的单调增区间，再由$\left[\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]$不包含于单调增区间即可判断；C 项先求出 $f(x)$的对称轴方程，再取适当的 k 值，得出 $x=-\frac{\pi}{3}$是其中一条对称轴即可判断；D 项先通过平移得到新函数的解析式，再与 $g(x)=2\sin 2x$ 比较即可判断.

【解析】由图象可得$\frac{3}{4}T=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3\pi}{4}$，解得 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

由周期及图象知：$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，将$\left(\frac{\pi}{6},2\right)$代入可得 $2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，A 正确；

当$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$单调递增，

因为$\left[\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]\not\subset\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，B 错误；

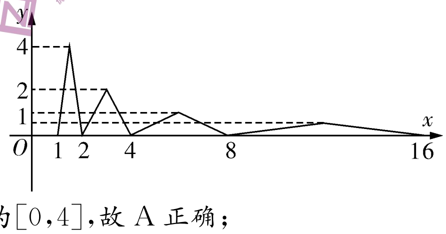
令 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{\pi}{3}$，C 正确；

$f(x)$的图象向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位，得到 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=-2\sin 2x\neq g(x)$，D 错误.

故选：AC.

11. ACD 【分析】作出函数的图象，再根据函数图象数形结合即可判断.

【解析】作出函数的图象，具体如下：先作 $f(x)=4-8\left|x-\frac{3}{2}\right|$在 $x\in[1,2]$的图象，然后向右每次将横坐标变为原来的 2 倍的同时，纵坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，如图所示：



(A)从图象可知，函数 $f(x)$的值域为$[0,4]$，故 A 正确；

(B)结合 $y=\frac{6}{x}$的图象，即知对于任意的 $x\in[1,8]$都有 $f(x)\leqslant\frac{6}{x}$，即 $xf(x)\leqslant 6$，故 B 正确；

(C)显然当 $x\in[2^{n-1},2^{n}]$时，函数 $f(x)$的最高点为 2^{3-n}，与 x 轴围成的面积为$\frac{1}{2}\times 2^{3-n}\times 2^{n-1}=2$，故 C 正确；

(D)$f(7)=\frac{1}{2}f\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{4}f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{1}{4}\left[4-8\left|\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\right|\right]=\frac{1}{2}$，$f(12)=\frac{1}{2}$，由图易知 D 正确.

故选：ACD.

12. BC 【分析】根据函数新定义，比较 $\log_m n$，$\log_n m$ 大小，然后结合题目条件，逐个判断.

选项 A：当 $1<a<3$ 时，$\log_3 a=\log_4 2$；当 $a>3$ 时，$\log_a 3=\log_4 2$；解得：$a=\sqrt{3}$或 $a=9$；

选项 B：将$\frac{a*b}{b*c}=c*a$ 转化为 $\log_a b=\log_b c\cdot\log_a c$；

选项 C：结合范围，化简 $a*b-a*c=\log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c}$，$a*\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a\frac{b}{c}$，然后对数运算.

选项 D：结合范围判断 $a^x * b^y=\log_{a^x}b^y=\frac{y}{x}\log_a b$，$b^y * c^z=\frac{z}{y}\log_b c$，$a^x * c^z=\frac{z}{x}\log_a c$，然后进行对数运算.

【解析】选项 A：当 $1<a<3$ 时，$\log_3 a=\log_4 2$，即 $\log_3 a=\frac{1}{2}$，亦即 $a=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$；

当 $a>3$ 时，$\log_a 3=\log_4 2$，即 $\log_a 3=\frac{1}{2}$，亦即 $a=9$. 综上，当 $a>1$ 时，$a=\sqrt{3}$ 或 $a=9$，则 A 错误；

选项 B：由 $\frac{a*b}{b*c}=c*a$ 及 $a\geqslant b\geqslant c>1$，得 $\log_a b=\log_b c\cdot\log_a c$，即 $\frac{\lg b}{\lg a}=\frac{\lg c}{\lg b}\cdot\frac{\lg c}{\lg a}$，即 $\lg^2 b=\lg^2 c$，即 $\lg b=\lg c$ 或 $\lg b=-\lg c$，即 $b=c$ 或 $bc=1$. 由 $b\geqslant c>1$，得 $bc>1$，从而可得 $b=c$，则 B 正确；

选项 C：若 $0<a<b<c<1$，则 $a*b-a*c=\log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c}$，而由 $1>\frac{b}{c}>b>a>0$，

得 $a*\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a\frac{b}{c}$，所以 $a*b-a*c=a*\left(\frac{b}{c}\right)$ 成立，则 C 正确；

选项 D：由指数函数 $f(t)=a^t(0<a<1)$ 是减函数，且 $x>y$，可得 $a^x<a^y$；
由幂函数 $h(x)=x^y(y>0)$ 是增函数，且 $a<b$，可得 $a^y<b^y$，于是 $0<a^x<b^y<1$，

所以 $a^x * b^y=\log_{a^x}b^y=\frac{y}{x}\log_a b$，同理 $b^y * c^z=\frac{z}{y}\log_b c$，$a^x * c^z=\frac{z}{x}\log_a c$，

所以 $\frac{(a^x * b^y)\cdot(b^y * c^z)}{a^x * c^z}=\frac{\frac{y}{x}\log_a b\cdot\frac{z}{y}\log_b c}{\frac{z}{x}\log_a c}=\frac{\log_a b\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}}{\log_a c}=1$，则 D 错误.

故选：BC.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 8040 【解析】$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{f(x)\cdot f(1)}{f(x)}=f(1)=4$，$\frac{f(1)}{f(0)}+\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(3)}{f(2)}+\cdots+\frac{f(2010)}{f(2009)}=2010\times4=8040$.

14. 4 【解析】∵$f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，∴$f(-x)=f(x+4)$，又 $f(x)$ 为奇函数，∴$f(-x)=-f(x)$，
故 $f(x+4)=-f(x)$，
则 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，∴函数 $f(x)$ 的周期 $T=8$，
又∵$2022=252\times8+6$，∴$f(2022)=f(6)=f(-2)=-f(2)=-(4-8)=4$.
故答案为 4.

15. $x=\frac{7\pi}{12}$ 【解析】因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调，

∴$\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$，∴$T\geqslant\frac{2\pi}{3}$，

∴$\frac{\pi}{2}$，$\frac{2\pi}{3}$ 在同一个周期内，

∵$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$，

∴$y=f(x)$ 图像的一条对称轴为 $x=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{7\pi}{12}$.

故答案为：$x=\frac{7\pi}{12}$.

16. 17 【解析】厚度为 $\alpha=10$ mm 的带钢从一端输入经过减薄率为 4% 的 n 对轧辊后厚度为 $10(1-4\%)^n$，过各对轧辊逐步减薄后输出，厚度变为 $\beta=5$，

则 $10(1-4\%)^n\leqslant5\Rightarrow(1-4\%)^n\leqslant\frac{1}{2}$，∵$(1-4\%)^n>0$，$\frac{1}{2}>0$，

∴$\lg(1-4\%)^n\leqslant\lg\frac{1}{2}\Rightarrow n\lg(1-4\%)\leqslant-\lg 2$，

∵$\lg(1-4\%)<0$，∴$n\geqslant\frac{-\lg 2}{\lg(1-4\%)}$，

$\Rightarrow n\geqslant\frac{-\lg 2}{\lg 0.96}=\frac{-\lg 2}{\lg(3\times2^5\times0.01)}=\frac{-\lg2}{\lg 3+5\lg 2-2}=\frac{-0.3010}{0.4771+5\times0.3010-2}\approx16.8156$，

故答案为：17.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1)根据表中已知数据，解得 $A=5,\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 数据补全如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5	0	-5	0

……… 2 分

且函数表达式为 $f(x)=5\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. …………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，得 $g(x)=5\sin\left(2x+2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $y=\sin x$ 的对称中心为 $(k\pi,0)$，$k\in\mathbf{Z}$.

令 $2x+2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta$，$k\in\mathbf{Z}$. …………………………………………… 7 分

由于函数 $y=g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 成中心对称，令 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta=\frac{5\pi}{12}$，

解得 $\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. ……………………………………………………………………… 9 分

由 $\theta>0$ 可知，当 $k=1$ 时，θ 取得最小值 $\frac{\pi}{6}$. …………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2^2}{1+2^2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$. ………………………………………… 2 分

$f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3^2}{1+3^2}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{9}{10}+\frac{1}{10}=1$. ……………………………………………………… 4 分

(2)由 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，可得 $f(1)=\frac{1}{2}$，……………………………………………………………… 5 分

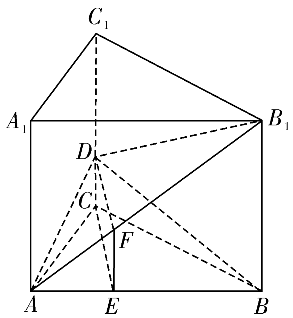
$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+x^2}{1+x^2}=1$， ………………………………… 8 分

故 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2022)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2022}\right)$

$=f(1)+\left[f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right]+\cdots+\left[f(2022)+f\left(\frac{1}{2022}\right)\right]$ ……………………… 10 分

$=\frac{1}{2}+2021=\frac{4043}{2}$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)**方法一(几何法)**：如图，作 $CE\perp AB$ 交 AB 于点 E，$EF/\!/BB_1$ 交 AB_1 于点 F，连接 DF，



因为 $AC=2,BC=3,AB=\sqrt{13}$，

所以 $AC^2+BC^2=2^2+3^2=(\sqrt{13})^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$，

所以由等面积可得 $CE=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{2\times3}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$，

由勾股定理得 $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)^2}=\frac{4\sqrt{13}}{13}$，

所以 $\frac{EF}{BB_1}=\frac{AE}{AB}=\frac{\frac{4\sqrt{13}}{13}}{\sqrt{13}}=\frac{4}{13}=\frac{CD}{CC_1}$，所以 $EF=CD$，

又 $EF /\!/ BB_1$，$CD /\!/ BB_1$，所以 $EF /\!/ CD$，

所以四边形 $EFDC$ 是平行四边形，所以 $DF /\!/ CE$，

因为直三棱柱，所以平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，又平面 $ABC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AB$，$CE\perp AB$，

所以 $CE\perp$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $DF\perp$ 平面 ABB_1A_1，

又 $DF\subset$ 平面 AB_1D，所以平面 $AB_1D\perp$ 平面 ABB_1A_1. ………………………………………………………… 6 分

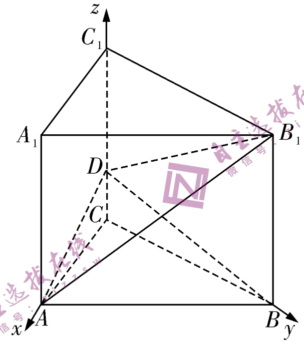
方法二(向量法)：因为 $AC=2$，$BC=3$，$AB=\sqrt{13}$，

所以 $AC^2+BC^2=2^2+3^2=(\sqrt{13})^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$，

由题知 $CC_1\perp$ 平面 ABC，又 AC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 AC，BC，CC_1 两两垂直，

以点 C 为原点，以 CA，CB，CC_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $CC_1=a(a>0)$，则 $A(2,0,0)$，$A_1(2,0,a)$，$B_1(0,3,a)$，$D\left(0,0,\frac{4a}{13}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(-2,3,a)$，$\overrightarrow{AD}=\left(-2,0,\frac{4a}{13}\right)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,a)$，

设平面 AB_1D 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-2x_1+3y_1+az_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=-2x_1+\frac{4a}{13}z_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=13$，得平面 AB_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2a,-3a,13)$，

设平面 ABB_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-2x_2+3y_2+az_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=az_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=3$ 得平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,2,0)$，

因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=6a-6a+0=0$，

所以 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，平面 $AB_1D\perp$ 平面 ABB_1A_1. ……………………………………………………………… 6 分

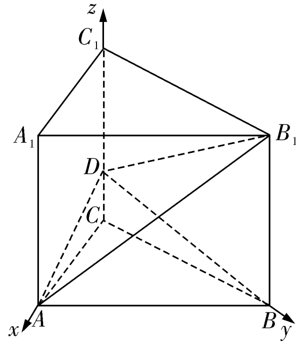
(2)因为直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{39}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\times2\times3\times CC_1=\frac{39}{2}$，解得 $CC_1=\frac{13}{2}$，

所以 $CD=2$，$C_1D=\frac{9}{2}$，

由题知 $CC_1\perp$ 平面 ABC，又 AC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 AC，BC，CC_1 两两垂直，

以点 C 为原点，以 CA，CB，CC_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系， …… 7 分



则 $A(2,0,0)$，$B_1\left(0,3,\dfrac{13}{2}\right)$，$D(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}=\left(-2,3,\dfrac{13}{2}\right)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,0,2)$，

设平面 AB_1D 的法向量为 $\boldsymbol{u}=(x_3,y_3,z_3)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-2x_3+3y_3+\dfrac{13}{2}z_3=0,\\ \boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{AD}=-2x_3+2z_3=0,\end{cases}$

令 $z_3=2$，得平面 AB_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{u}=(2,-3,2)$，

易知平面 BB_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{v}=(1,0,0)$ ……………………………………………… 9 分

设二面角 $A-B_1D-B$ 的大小为 θ，

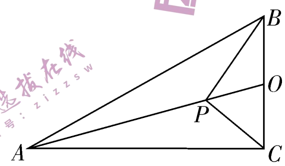
易知 θ 为锐角，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}=\dfrac{(2,-3,2)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{17}\times1}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$， ……………………………… 11 分

所以二面角 $A-B_1D-B$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$. ………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由正弦定理及 $\dfrac{2\sin A-\sin C}{\sin C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$，得 $\dfrac{2a-c}{c}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$，…………………… 3 分

即 $\dfrac{2a}{c}-1=\dfrac{2a^2-a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}=\dfrac{2a^2}{a^2+c^2-b^2}-1$，化简得 $a^2+c^2-b^2=ac$，故 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$，故 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………… 6 分



(2)$\because\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，$\therefore PB\perp PC$，$\because BC=2$，$O$ 为 BC 中点，$\therefore PO=1$，

$\because a=2$，$\therefore AC=2\sqrt{3}$，$AB=4$，$\therefore AO=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{13}$，$AP=\sqrt{13}-1$，…………………………… 8 分

设 $\angle OCP=\alpha$，则 $\angle COP=\pi-2\alpha$，

$\therefore\sin\alpha=\dfrac{PB}{BC}=\dfrac{1}{2}PB$，$\cos\alpha=\dfrac{PC}{BC}=\dfrac{1}{2}PC$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}PB\times PC=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$， …………………………………………………… 10 分

在直角 $\triangle ACO$ 中，$\sin\angle COA=\sin(\pi-2\alpha)=\sin 2\alpha=\dfrac{AC}{AO}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$，

$\therefore$ 当 $AP=\sqrt{13}-1$ 时，$\triangle BPC$ 的面积 S 为 $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$. …………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由题中实验园的频率分布直方图得这 100 个果实中大果的频率为 $(0.110+0.010)\times5=0.6$，所以估计实验园的“大果”率为 60%. ……………………………………………………………………… 3 分

(2)由题中对照园的频率分布直方图得，这 100 个果实中大果的个数为 $(0.040+0.020)\times5\times100=30$. 采用分层抽样的方法从对照园选取的 100 个果实中抽取 10 个，其中大果有 $\dfrac{30}{100}\times10=3$(个)， ………………… 4 分

从这 10 个果实中随机抽取 3 个，其中“大果”的个数 X 的可能取值为 0，1，2，3， ……………………… 5 分

$P(X=0)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$，$P(X=1)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$，$P(X=2)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$，

…………………………………………………………………………………………… 7 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

…………………………………………………………………………………………… 8 分

(3)由题可知 $P(n)=C_n^2\times0.3^2\times0.7^{n-2}$，$P(n-1)=C_{n-1}^2\times0.3^2\times0.7^{n-3}$，$P(n+1)=C_{n+1}^2\times0.3^2\times0.7^{n-1}$，…

…………………………………………………………………………………………… 10 分

要使 $P(n)$ 最大，则 $\frac{P(n-1)}{P(n)}=\frac{C_{n-1}^2\times0.7^{n-3}}{C_n^2\times0.7^{n-2}}=\frac{10(n-2)}{7n}<1$ 且 $\frac{P(n+1)}{P(n)}=\frac{C_{n+1}^2\times0.7^{n-1}}{C_n^2\times0.7^{n-2}}=\frac{7(n+1)}{10(n-1)}<1$，

$\therefore\frac{17}{3}<n<\frac{20}{3}$，又 $\because n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n=6$. …………………………………………… 12 分

22.**【解析】**(1)由题意，得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 且 $\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2b=4\sqrt{5}$，又 $a^2=b^2+c^2$，

解得 $a^2=5$，$b^2=4$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. …………………………………………… 4 分

(2)设切线 OA 的方程为 $y=k_1x$，切线 OB 的方程为 $y=k_2x$，"环绕圆"的圆心 D 为 (x_0,y_0).

由"环绕圆"的定义，可得"环绕圆"的半径为 1，所以"环绕圆"的标准方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1$ … 6 分

因为直线 OA：$y=k_1x$ 与"环绕圆"相切，则由点到直线的距离公式可得：$\frac{|k_1x_0-y_0|}{\sqrt{k_1^2+1}}=1$， ……………… 8 分

化简得 $(x_0^2-1)k_1^2-2x_0y_0k_1+y_0^2-1=0$.

同理可得 $(x_0^2-1)k_2^2-2x_0y_0k_2+y_0^2-1=0$.

所以 k_1，k_2 是方程 $(x_0^2-1)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-1=0$ 的两个不相等的实数根，

所以 $x_0^2-1\neq0$，$\Delta>0$，$k_1k_2=\frac{y_0^2-1}{x_0^2-1}$，…………………………………………… 9 分

又因为"环绕圆"的圆心 (x_0,y_0) 在椭圆 C 上，所以代入椭圆方程 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 中，

可得 $\frac{x_0^2}{5}+\frac{y_0^2}{4}=1$，解得 $y_0^2=4-\frac{4}{5}x_0^2$.

所以 $k_1k_2=\frac{y_0^2-1}{x_0^2-1}=-\frac{1}{5}\left(4-\frac{11}{x_0^2-1}\right)$. …………………………………… 10 分

又因为 $0\leqslant x_0^2\leqslant5$ 且 $x_0^2-1\neq0$，所以 $-1\leqslant x_0^2-1<0$ 或 $0<x_0^2-1\leqslant4$.

所以 $\frac{1}{x_0^2-1}\leqslant-1$ 或 $\frac{1}{x_0^2-1}\geqslant\frac{1}{4}$，所以 $\frac{-11}{x_0^2-1}\geqslant11$ 或 $\frac{-11}{x_0^2-1}\leqslant-\frac{11}{4}$，

所以 $-\frac{1}{5}\left(4-\frac{11}{x_0^2-1}\right)\leqslant-3$ 或 $-\frac{1}{5}\left(4-\frac{11}{x_0^2-1}\right)\geqslant-\frac{1}{4}$.

所以 k_1k_2 的取值范围是 $(-\infty,-3]\cup\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$. ……………………………… 12 分