

2022-2023 学年度第二学期 6 月份学情检测

数学试题

2023.06

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，答题时间 120 分钟。

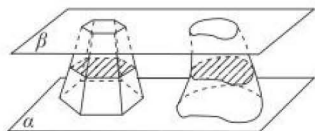
注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的级部、班级、姓名、准考证号、写在答题纸密封线外，并将姓名、准考证号、考试科目、试卷类型填涂在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。
3. 考试结束后将答题卡交回。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每题给出的四个选项中，只有一项是最符合题意的。

1. 若复数 $\bar{z} = \frac{1+2i}{i}$ (i 为虚数单位)，则 $|z| = (\quad)$
A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$
2. 设 α, β 为两个不同的平面， m, n 为两条不同的直线，下列命题正确的是 ()
A. 若 $m \parallel n, n \subset \alpha$ ，则 $m \parallel \alpha$ B. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, m \parallel n$ ，则 $\alpha \parallel \beta$
C. 若 $m \perp \beta, n \parallel \beta$ ，则 $m \perp n$ D. 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \perp m$ ，则 $n \perp \alpha$
3. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=3, BC=4, C=30^\circ$ ，则此三角形解的情况是 ()
A. 有一解 B. 有两解 C. 无解 D. 有解但解的个数不确定
4. 若向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=2\sqrt{3}$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b}=3$ ，则向量 \vec{b} 与 $\vec{b}-\vec{a}$ 夹角的余弦值为 ()。
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ C. $\frac{7\sqrt{2}}{16}$ D. $\frac{3\sqrt{30}}{20}$
5. 中国南北朝时期数学家、天文学家祖冲之、祖暅父子总结了魏晋时期著名数学家刘徽的有关工作，提出“幂势既同，则积不容异”。“幂”是截面积，“势”是几何体的高。即界于两个平行平面之间的两个几何体，被任一平行于这两个平面的平面所截，如果两个截面的面积相等，则这两个几何体的体积相等。上述原理在中国被称为祖暅原理。一个上底面边长为 1，下底面边长为 2，高为 $2\sqrt{3}$ 的正六棱台与一个不规则几何体满足“幂势既同”，则该不规则几何体的体积为 ()



(第 5 题图)



图1

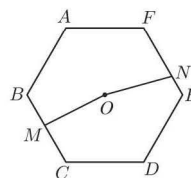


图2

(第 6 题图)

- A. 16 B. $16\sqrt{3}$ C. $18\sqrt{3}$ D. 21
6. 如上图 1，蜜蜂蜂房是由严格的正六棱柱构成的，它的一端是平整的六边形开口，六边形开口可记为图 2 中的正六边形 $ABCDEF$ ，其中 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ ，若 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ ，

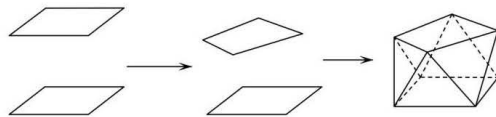
$\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{EN}$, 则 $\overrightarrow{MN} =$ ()

- A. $\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{7}{6}\vec{b}$ B. $-\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{7}{6}\vec{b}$ C. $-\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$ D. $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$

7. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD, AB = BC = \frac{BD}{2} = 1, AC = CD = \sqrt{3}$, 点 E 在四边形 $ABCD$ 的边上运动, 则 $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED}$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. -1

8. 取两个相互平行且全等的正 n 边形, 将其中一个旋转一定角度, 连接这两个多边形的顶点, 使得侧面均为等边三角形, 我们把这种多面体称作“ n 角反棱柱”. 当 $n=4$ 时, 得到如图所示棱长均为 2 的“四角反棱柱”, 则该“四角反棱柱”外接球的表面积等于 ()



- A. 11π B. $(8+2\sqrt{2})\pi$ C. $(8+2\sqrt{3})\pi$ D. $\frac{11\sqrt{11}}{6}\pi$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 下面是关于复数 $z = \frac{2}{-1-i}^{2023}$ (i 为虚数单位) 的命题, 其中真命题为 ()

- A. z 的虚部为 $-i$ B. 若 $|z_0 - z| = 1$, 则 $|z_0|$ 的最大值是 $\sqrt{2} + 1$
C. z 的共轭复数为 $-1+i$ D. z 在复平面内对应的点在第二象限

10. 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \parallel \vec{c}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{c}$
B. 两个非零向量 \vec{a} 和 \vec{b} , 若 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 垂直
C. 若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心
D. 已知 $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (t, 1)$, 若 \vec{b} 在 \vec{a} 上的投影向量为 $\sqrt{5}\vec{e}$ (\vec{e} 为与 \vec{a} 同向的单位向量), 则 $t = 2$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, a \sin B = b \sin \frac{B+C}{2}, a = 3, O$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心, M 为 BC 的中点. 则下列结论正确的有 ()

- A. $A = \frac{\pi}{3}$ B. $\triangle ABC$ 外接圆面积为 12π
C. $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{9}{2}$ D. AM 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

12. 如图 1, 在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别为 BC, CD 的中点, 沿 AE, AF 及 EF 把这个正方形折成一个四面体, 使得 B, C, D 三点重合于点 S , 得到四面体 $S-AEF$ (如图 2). 下列结论正确的是 ()

- A. 平面 $AEF \perp$ 平面 SAF
 B. 四面体 $S-AEF$ 的体积为 $\frac{1}{3}$
 C. 二面角 $A-EF-S$ 正切值为 $\sqrt{2}$
 D. 顶点 S 在底面 AEF 上的射影为 $\triangle AEF$ 的垂心

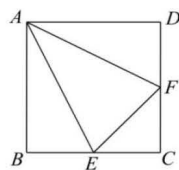


图1

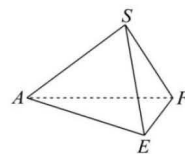
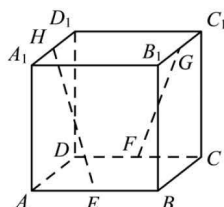


图2

第II卷（非选择题 共90分）

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知圆锥侧面展开图扇形的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ ，底面圆的半径为1，则圆锥的体积为_____.
14. 已知向量 \vec{a} ， \vec{b} 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$ ， $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，且 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 垂直，则 $\lambda =$ _____.
15. 已知 E, F, G, H 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，边 AB, CD, B_1C_1, A_1D_1 的中点，则异面直线 EH 与 GF 所成角的余弦值为_____.



16. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别 a, b, c ， $A = \frac{\pi}{3}$. 若 AM 是 $\angle CAB$ 的平分线，交 BC 于点 M ，且 $AM=2$ ，则 $AC+3AB$ 的最小值为_____；若 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心是 O ，半径是1，则 $\vec{OA} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC})$ 的取值范围是_____.

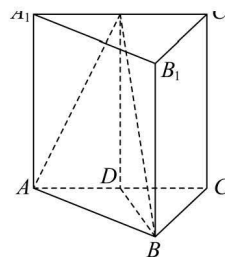
四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知复数 $z_1 = \frac{2m^2}{1-i}$ ， $z_2 = (2+i)m - 3(1+2i)$ ， $m \in \mathbb{R}$ ， i 为虚数单位.

- (1)若 $z_1 + z_2$ 是纯虚数，求实数 m 的值；
 (2)若 $z_1 + z_2 > 0$ ，求 $z_1 \cdot z_2$ 的值.

18. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， D, E 分别为 AC, A_1C_1 的中点， $AB = BC = \sqrt{5}$ ， $AC = AA_1 = 2$.

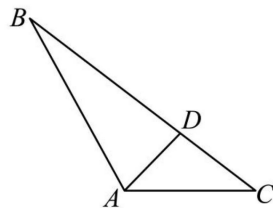
- (1)求证： $AC \perp$ 平面 BDE ；
 (2)求点 D 到平面 ABE 的距离.



19. 在 $\triangle ABC$ 中, $CA=2$, $AB=3$, $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$, D 为 BC 的三等分点 (靠近 C 点).

(1) 求 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值;

(2) 若点 P 满足 $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CA}$, 求 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值, 并求此时实数 λ 的值.



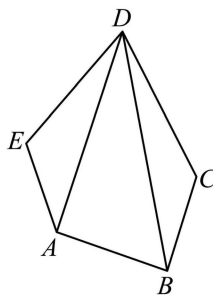
20. 山东省济南市莱芜第一中生物社团计划在综合实践基地举行油菜花节的活动, 为了让油菜花种植区与观赏路线布局最优化、合理, 首先规划了一个平面图 (如图).

已知: A, B, D, E 四点共圆, $\angle ABD=60^\circ$, $AE=2$, $AB=2$, $\cos \angle EDA = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, 其中 AD, DB (不计宽度)

是观赏路线, $\triangle BCD$ 与 $\triangle AED$ 是油菜花区域.

(1) 求观赏路线 $AD+DB$ 的长度;

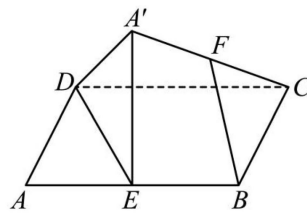
(2) 因为场地原因, 只能使 $\angle BCD=135^\circ$, 求 $\triangle BCD$ 区域面积的最大值.



21. 如图所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=2BC=8\sqrt{3}$, $\angle DAB=\frac{\pi}{3}$, E 为边 AB 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折为 $\triangle A'DE$, 若 F 为线段 $A'C$ 的中点. 在 $\triangle ADE$ 翻折过程中,

(1) 求证: $BF \parallel$ 平面 $A'DE$;

(2) 若二面角 $A'-DE-C$ 的大小为 60° , 求 $A'C$ 与面 $A'ED$ 所成角的正弦值.



22. (1) 平面多边形中, 三角形具有稳定性, 而四边形不具有这一性质. 如图所示, 四边形 $ABCD$ 的顶点在同一平面上, 已知 $AB=BC=CD=2$, $AD=2\sqrt{3}$. 当 BD 长度变化时, $\sqrt{3}\cos A - \cos C$ 是否为一个定值? 若是, 求出这个定值; 若否, 说明理由.

(2) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A}{\tan B} = 1 + \sin A$, 求 $\frac{a \sin B + b \sin A}{2b \cos B}$ 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

