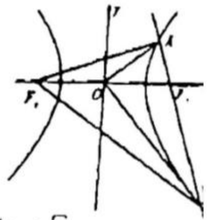
高三年第二学期 考一(数学)参考答案

1~8．DAAC BDBC 9. BD 10. AC 11. BCD 12. ABD

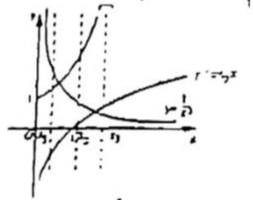
13. -1320 14. $\frac{2}{3}$ 15. $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$（答案不唯一） 16. ①. $a^2+b^2=1$ ②. 4π.

第 6 题详解：

【解析】依题意，定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(x)-2$，所以 $f(x+1)+2(x+1)=f(x)+2x$，所以 $y=f(x)+2x$ 是周期为 1 的周期函数. 故选 D.



8. C【解析】在 $a_{n+1}+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a_n=2$ 中，分别令 $n=1,2$，得 $a_2-a_1=2$，$a_4-a_3=2$，两式相加得 $a_1+a_4=a_1+a_3+4=4$. 在 $a_{n+1}+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a_n=2$ 中，分别令 $n=3,4$，得 $a_4+a_3=2$，$a_5+a_4=2$，两式相加得 $a_3+a_4+a_4+a_5=4$，所以 $a_6+a_5=0$，依次类推，可得 $a_{4k-3}+a_{4k-2}=0$，$a_{4k-1}+a_{4k}=4$，所以数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项的和为 $\frac{100}{4}\times 4=100$.

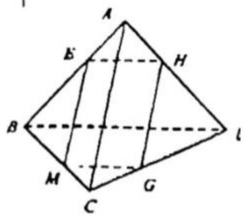


11. BCD【详解】设 $\ln a=2^b=c^{-\frac{1}{2}}=t$，$t>0$，则 $a=e^t$，$b=\log_2 t$，$c=\frac{1}{t^2}$，

在同一坐标系中分别画出函数 $y=e^x$，$y=\log_2 x$，$y=\frac{1}{x^2}$ 的图象，

当 $t=x_1$ 时，$c>a>b$，当 $t=x_2$ 时，$a>c>b$，当 $t=x_3$ 时，$a>b>c$，

由此可以看出，不可能出现 $c>b>a$ 这种情况，



12. ABD【详解】如图 1，由 $AC//$ 平面 $EMGH$，$AC\subset$ 平面 ABC，平面 $ABC\cap$ 平面 $EMGH=EM$，得 $AC//EM$，同理 $AC//HG$，所以 $EM//HG$，同理 $EH//MG$，

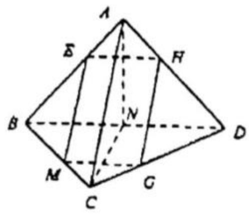
所以 $EMGH$ 是平行四边形，$\frac{AE}{AB}=\lambda$，则 $\frac{EH}{AD}=\lambda$，$\frac{EM}{AC}=1-\lambda$，

正四面体 $ABCD$ 的棱长为 $2\sqrt{2}$，则 $EH=2\sqrt{2}\lambda$，$EM=2\sqrt{2}(1-\lambda)$，

所以 $EMGH$ 的周长为 $2(EH+EM)=4\sqrt{2}$，为定值，A 正确；

如图 2，取 BD 中点 N，连接 AN,CN，则 $AN\perp BD,CN\perp BD$，又 $AN\cap CN=N$，$AN,CN\subset$ 平面 ACN，所以 $BD\perp$ 平面 ACN，而 $AC\subset$ 平面 ACN，所以 $BD\perp AC$，所以 $EM\perp MG$，

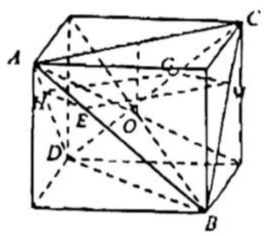
所以 $S_{EMGH}=2\sqrt{2}\lambda\cdot 2\sqrt{2}(1-\lambda)=8(\lambda-\lambda^2)$，由图 2 知 A 点到平面 $EMGH$ 的距离为 2λ，所以 $V_{A-EMGH}=\frac{1}{3}\times 8(\lambda-\lambda^2)\times 2\lambda=\frac{16}{3}(\lambda^2-\lambda^3)$，



设 $f(x)=x^2-x^3$（$0<x<1$），则 $f'(x)=2x-3x^2=-3x(x-\frac{2}{3})$，

$0<x<\frac{2}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，$\frac{2}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

$x=\frac{2}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(\frac{2}{3})=\frac{4}{27}$，所以 V_{A-EMGH} 的最大值为 $\frac{16}{3}\times\frac{4}{27}=\frac{64}{81}$，B 正确；



如图 ，把正四面体 $ABCD$ 放置在一个正方体中，正四面体的棱是正方体的面对角线，如图，正方体的外接球就是正四面体 $ABCD$ 的外接球，由正四面体棱长为 $2\sqrt{2}$ 得正方体的棱长为 2，正方体的对角线是外接球的直径，所以外接球半径为 $R=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

由于平面 $EMGH$ 与 AC,BD 平行，因此易得平面 $ENGH$ 与正方体的上下底面平行，

$\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$，平面 $EMGH$ 过外接球球心 O，平面 α 截球 O 所得截面圆为大院半径为 $R=\sqrt{3}$，截面圆周长为 $2\pi R=2\sqrt{3}\pi$，C 错；

还是如图 一样把正四面体 $ABCD$ 放置在一个正方体中，$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时，E、F

是正方体前后两个面的中心（对角线交点），由正方体性质，正四面体 $ABCD$ 绕 EF 旋转 $90°$ 后得下四面体 $A'B'C'D'$，A',B',C',D' 是正方体的另外四个顶点，这两个正四面体的公共部分正好是一个正八面体，正八面体的六个顶点是正方体六个面的中心，

$S_{EMFH}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，正八面体的体积为 $V=2\times\frac{1}{3}\times2\times1=\frac{4}{3}$，D 正确.

16.【详解】由题意，若圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 是直线族 $ax+by-1=0(a,b\in R)$ 的包络线，

可得 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$，可得 $a^2+b^2=1$；又由曲线 C_2 是直线族 $(1-t^2)x+2ty-2t-4=0(t\in R)$ 的包络线，

可得 $\frac{\left|-xt^2+2(y-1)t+x-4\right|}{1+t^2}$ 为定值 r，则 $\begin{cases}2(y-1)=0\\-x=x-4\end{cases}$，可得 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，此时 $r=2$，

所以曲线 C_2 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$，所以曲线 C_2 的周长为 4π.

17. 解：（1）由 $S_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$①，可得 $S_{n-1}=(n-2)\cdot2^n+2(n\geq2)$②，

由①－②得 $a_nb_n=n\cdot2^n(n\geq2)$，又 $a_1b_1=2$ 也符合上式，所以 $a_nb_n=n\cdot2^n$，

由 $b_1=2$ 得 $a_1=1$，设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则有 $(dn+1-d)\times2\times q^{n-1}=n\cdot2^n$，

令 $n=2$，有 $(1+d)\times2\times q=8$，令 $n=3$，有 $(1+2d)\times2\times q^2=24$，解得 $d=1$，$q=2$ 或者 $d=-\frac{1}{3},q=6$，

取 $n=4$，有 $(1+3d)\times2\times q^3=64$，检验得 $d=-\frac{1}{3},q=6$（舍去），所以 $a_n=n,b_n=2^n$；

（2）由 $c_n=(2a_n-1)\cdot b_n=2a_nb_n-b_n$ 得 $c_n=(2n-1)\cdot2^n$，

所以 $T_n=2S_n-(b_1+b_2+\cdots+b_n)=2(n-1)2^{n+1}+4-\frac{2(1-2^n)}{1-2}=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6$，

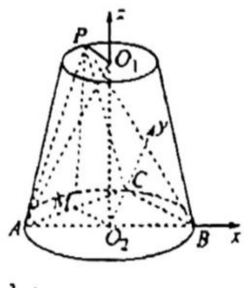
18.（1）取 AC 中点 M，由题意，$PO_1=1,BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2$，又 $PO_1//BC$，故 $PO_1//\frac{1}{2}BC,PO_1=\frac{1}{2}BC$.

又 $O_2M//\frac{1}{2}BC,O_2M=\frac{1}{2}BC$，故 $PO_1//O_2M,PO_1=O_2M$，所以四边形 PO_1O_2M 为平行四边形，则 $PM//O_1O_2$. 由 $O_1O_2\perp$ 平面 ABC，故 $PM\perp$ 平面 ABC，又 $PM\subset$ 面 PAC，故平面 $PAC\perp$ 平面 ABC.

（2）以 O_2 为坐标原点，$\overrightarrow{O_2B},\overrightarrow{O_2C},\overrightarrow{O_2O_1}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系. 则有：$A(-\sqrt{2},0,0),B(\sqrt{2},0,0),C(0,\sqrt{2},0),P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},2\right),O_1(0,0,2)$，

故 $\overrightarrow{AO_1}=(\sqrt{2},0,2)$. 设平面 PBC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，而 $\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0),\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$，

故 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+2z=0\end{cases}$，令 $z=1$，得 $\vec{n}=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$.



设所求角的大小为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AO_1},\vec{n}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AO_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AO_1}\right|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|2+2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

所以直线 AO_1 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

19. 解：（1）因为 $\sin A\sin2A=(1-\cos A)(1-\cos2A)$，所以 $2\sin^2A\cos A=(1-\cos A)\times2\sin^2A$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq0$，所以 $\cos A=1-\cos A$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$；

（2）因为 $S=\frac{\sqrt{3}}{12}(8b^2-9a^2)$，所以 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{12}(8b^2-9a^2)$，所以 $\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}(8b^2-9a^2)$，整理得，

$3bc=8b^2-9a^2$，①又 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，所以 $b^2+c^2-a^2=bc$，②

②-①×9 得，$b^2-6bc+9c^2=0$，所以 $(b-3c)^2=0$，即 $b=3c$，代入②中，可得 $a^2=7c^2$，

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7c^2+c^2-9c^2}{2\times\sqrt{7}c\times c}=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

20. 解：(I) $\because |HE|+|HF|=|EH|+|HG|=4$，且 $|EF|=2<4$，$\therefore$ 点 H 的轨迹是以 E，F 为焦点的椭圆，设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则 $2a=4$，$c=1$，$\therefore a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$.

所以点 H 的轨迹方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 设直线 MN 的方程为：$x=my+n$. 由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my+n\end{cases}$，得 $(3m^2+4)y^2+6mny+3n^2-12=0$，

设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{6mn}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{3n^2-12}{3m^2+4}$.

所以，$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2n=\dfrac{8n}{3m^2+4}$，$x_1x_2=(my_1+n)(my_2+n)=\dfrac{-12m^2+4n^2}{3m^2+4}$，

因为直线 MA 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=4$，得 $y_P=\dfrac{2y_1}{x_1-2}$，所以，$P\left(4,\dfrac{2y_1}{x_1-2}\right)$，同理可得 $Q\left(4,\dfrac{2y_2}{x_2-2}\right)$，

以 PQ 为直径的圆的方程为：$(x-4)^2+\left(y-\dfrac{2y_1}{x_1-2}\right)\left(y-\dfrac{2y_2}{x_2-2}\right)=0$，即

$(x-4)^2+y^2-\left(\dfrac{2y_1}{x_1-2}+\dfrac{2y_2}{x_2-2}\right)y+\dfrac{2y_1}{x_1-2}\times\dfrac{2y_2}{x_2-2}=0$，因为圆过点 $(7,0)$，所以，$9+\dfrac{2y_1}{x_1-2}\times\dfrac{2y_2}{x_2-2}=0$，得

$9+\dfrac{4y_1y_2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=0$，代入得 $9+\dfrac{\dfrac{12n^2-48}{3m^2+4}}{\dfrac{-12m^2+4n^2}{3m^2+4}-\dfrac{16n}{3m^2+4}+4}=0$，化简得，

$9+\dfrac{12n^2-48}{4n^2-16n+16}=0\left(4n^2-16n+16\neq0,n\neq2\right)$，解得 $n=1$ 或 $n=2$（舍去），所以直线 MN 经过定点 $(1,0)$

（优化思维）易知 $k_{QF}\cdot k_{PF}=-1$，即 $y_Py_Q=-9$，即 $k_{AM}\cdot k_{AN}=k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\dfrac{9}{4}$（下略）

21.（1）20 种新产品中产品 A 没有被甲部门和乙部门同时选中的概率：$P=\dfrac{C_{19}^{10}}{C_{20}^{10}}\cdot\dfrac{C_{19}^{10}}{C_{20}^{10}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，

所以产品 A 被甲部门或乙部门选中的概率为 $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，

（2）令 $t=(x-3)^2$，由题中数据 $\bar{t}=\dfrac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-3)^2=20.5$，　$\bar{y}=\dfrac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=7.5$，

$\sum\limits_{i=1}^{10}t_iy_i=\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-3)^2y_i=2016$，　$\sum\limits_{i=1}^{10}t_i^2=\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-3)^4=8773$，

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}t_iy_i-10\bar{t}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{10}t_i^2-10\bar{t}^2}=\dfrac{2016-205\times7.5}{8773-205\times20.5}=\dfrac{29}{277}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=7.5-\dfrac{29}{277}\times20.5\approx5.4$，

（3）由题知，掷骰子时甲部门增加投资 1 万元发生概率为 $\dfrac{2}{3}$，乙部门增加投资 2 元发生概率为 $\dfrac{1}{3}$，

设投资资金总和恰好为 n 万元的概率为 P_n，则投资资金总和恰好为 $(n+1)$ 万元的概率为 $P_{n+1}=\dfrac{2}{3}P_n+\dfrac{1}{3}P_{n-1}$，

所有 $P_{n+1}-P_n=\dfrac{2}{3}P_n+\dfrac{1}{3}P_{n-1}-P_n=-\dfrac{1}{3}(P_n-P_{n-1})(n\geqslant2)$，因为 $P_1=\dfrac{2}{3},P_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{9},P_2-P_1=\dfrac{7}{9}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$，

所以数列 $\{P_{n+1}-P_n\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{9}$，公比为 $-\dfrac{1}{3}$ 的等比数列，所以 $P_{n+1}-P_n=\dfrac{1}{9}\times(-\dfrac{1}{3})^{n-1}$，所以

$P_{100}=P_1+(P_3-P_1)+(P_5-P_3)+\cdots+(P_{99}-P_{98})+(P_{100}-P_{99})=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times(-\frac{1}{3})+\frac{1}{9}\times(-\frac{1}{3})^2+\cdots+\frac{1}{9}\times(-\frac{1}{3})^{98}$

$=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{9}\times[1-(-\frac{1}{3})^{99}]}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times(\frac{1}{3})^{99}$，所有投资资金总和恰好为 100 万元的概率为 $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times(\frac{1}{3})^{99}$.

22. 解：（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{\ln x+2}{x}-2$，令 $f'(x)=\frac{-\ln x-1}{x^2}=0$ 则 $x=\frac{1}{e}$

此时 $x\in(0,\frac{1}{e})$，$f'(x)>0$，$x\in(\frac{1}{e},+\infty)$，$f'(x)<0$ $\therefore f(x)_{极大}=f(\frac{1}{e})=e-2$，无极小值

（2）原式等价于 $\frac{f(x)}{x-1}+\frac{a}{x}>0$，即 $\frac{xf(x)+a(x-1)}{x-1}>0$，$\frac{1}{x-1}\left[\ln x+a(x^2-1)-2(x-1)\right]>0$

令 $g(x)=\ln x+a(x^2-1)-2(x-1)$，$g(1)=0$ $g'(x)=\frac{1}{x}+2ax-2=\frac{2ax^2-2x+1}{x}$

因为 $\frac{1}{x-1}\left[\ln x+a(x^2-1)-2(x-1)\right]>0$，$g(2)=\ln 2+a(2^2-1)-2(2-1)>0\Rightarrow a>\frac{2-\ln 2}{3}>0$

当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$2ax^2-2x+1\ge x^2-2x+1=(x-1)^2>0$ $\therefore g'(x)>0$ $\therefore g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增

$\because g(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$ $\therefore \frac{1}{x-1}g(x)>0$ 符合题意

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，令 $2ax^2-2x+1=0$，得 $x_2=\frac{1+\sqrt{1-a}}{2a}>1$ $\therefore$ 当 $x\in(1,\frac{1+\sqrt{1-a}}{2a})$ 时，$g'(x)<0$ 即

$g(x)$ 在 $x\in(1,\frac{1+\sqrt{1-a}}{2a})$ 上单调递减 $\because g(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(1,x_2)$ 时 $g(x)<0$ $\therefore \frac{1}{x-1}g(x)<0$，不符合题意，舍去. 综上：$a\ge\frac{1}{2}$

法 2：①当 $x>1$ 时，$xf(x)>a(1-x)$，$\ln x+2+a(x-1)x-2x>a-ax$

$g(x)=\ln x+ax^2-2x+2-a>0$，$x\in(1,+\infty)$ 恒成立 $g'(x)=\frac{1}{x}+2ax-2=\frac{2ax^2-2x+1}{x}$

因为 $g(2)=\ln 2+a(2^2-1)-2(2-1)>0\Rightarrow a>\frac{2-\ln 2}{3}>0$ 当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，

$2ax^2-2x+1\ge x^2-2x+1=(x-1)^2>0$ $\therefore g'(x)>0$ $\therefore g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\because g(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$ 符合题意. 当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，令 $2ax^2-2x+1=0$，得 $x_2=\frac{1+\sqrt{1-a}}{2a}>1$ $\therefore x\in(1,\frac{1+\sqrt{1-a}}{2a})$ 时，$g'(x)<0$ 即 $g(x)$ 在 $x\in(1,\frac{1+\sqrt{1-a}}{2a})$ 上单调递减.

$\because g(1)=0$ $\therefore$ 当 $x\in(1,x_2)$ 时 $g(x)<0$ 不符合题意，舍去.

②当 $0<x<1$ 时，$xf(x)<a(1-x)$，$\ln x+2+a(x-1)x-2x<a-ax$

$g(x)=\ln x+ax^2-2x+2-a<0$，$x\in(0,1)$ 恒成立 $g'(x)=\frac{1}{x}+2ax-2=\frac{2ax^2-2x+1}{x}$ 因为 $g(\frac{1}{2})<0\Rightarrow a>\frac{2-\ln 2}{3}>0$. 当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$2ax^2-2x+1\ge x^2-2x+1=(x-1)^2>0$，

$\therefore g'(x)>0$ $\therefore g(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单调递增，$\because g(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$ 符合题意

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，令 $2ax^2-2x+1=0$，得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-a}}{2a}\in(0,1)$，$\therefore$ 当 $x\in(x_1,1)$ 时，$g'(x)<0$ 即 $g(x)$ 在 $x\in(\frac{1-\sqrt{1-a}}{2a},1)$ 上单调递减 $\because g(1)=0$ $\therefore$ 当 $x\in(x_1,1)$ 时 $g(x)>0$ 不符合题意舍去，综上：$a\ge\frac{1}{2}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。