线 题 ◇ 答 订 要 ◇ 不 装 内 ◇ 线 封 封 ◇ 弥 弥

考号________ 班级________ 姓名________

2022—2023学年度下学期高三年级第五次综合素养测评

数学试卷

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共150分,考试时间120分钟.

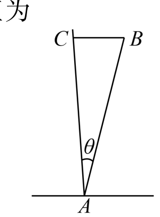
第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.已知集合 $A=\{x|\log_2 x<1\}$,$B=\{x|x>1\}$,则 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ (　　)

A. $\{x|x<2\}$　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$　C. $\{x|x\leqslant 1\}$　D. $\mathbf{R}$

2.塔因为年代久远,塔身容易倾斜,在下方如图中,AB 表示塔身,塔身 AB 的长度就是塔的高度,塔身与铅垂线 AC 的夹角 θ 为倾斜角,塔顶 B 到铅垂线的距离 BC 为偏移距离,现有两个塔高相同的斜塔,它们的倾斜角的正弦值分别为$\frac{7}{25}$,$\frac{9}{41}$,两座塔的偏移距离差的绝对值为3.1米,则两座塔的塔顶到地面的距离差的绝对值为 (　　)



A. 1.2米　B. 0.6米　C. 1米　D. 0.8米

3.已知向量 $\boldsymbol{a}=(7\sin\theta-1,5)$,$\boldsymbol{b}=(1,-\cos^2\theta)$,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\cos 2\theta=$ (　　)

A. $-\frac{7}{25}$　B. $\frac{7}{25}$　C. $-\frac{24}{25}$　D. $\frac{24}{25}$

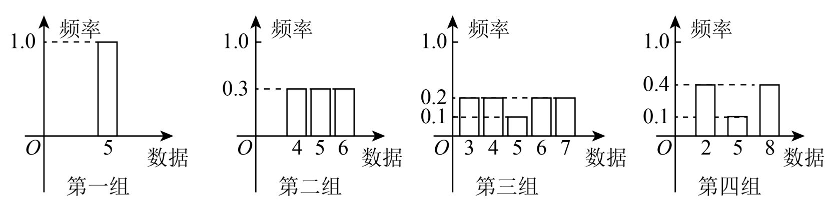
4.若 $1,a_1,a_2,4$ 成等差数列,$1,b_1,b_2,b_3,4$ 成等比数列,则$\frac{a_1-a_2}{b_2}$等于 (　　)

A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\pm\frac{1}{2}$　D. $\frac{1}{4}$

5.设 z 为复数,i为虚数单位,关于 x 的方程 $x^2+zx+\mathrm{i}=0$ 有实数根,则复数 z 的模 $|z|$ 的取值范围是 (　　)

A. $[2,+\infty)$　B. $[\sqrt{2},+\infty)$　C. $[4,+\infty)$　D. $[8,+\infty)$

6.如下图,样本容量为9的四组数据,它们的平均数都是5,频率条形图如下,则标准差最大的一组是 (　　)



A. 第一组　B. 第二组　C. 第三组　D. 第四组

7.双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两个焦点为 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,以 C 的虚轴为直径的圆记为 D,过 F_1 作 D 的切线与 C 的渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 交于点 H,若$\triangle F_1HO$ 的面积为$\frac{\sqrt{2}}{4}ac$,则 C 的离心率为 (　　)

A. $\sqrt{6}$　B. 2　C. $\sqrt{3}$　D. $\sqrt{2}$

8.已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x\in[0,1]$时,$f(x)=a-\cos\frac{\pi}{2}x$,若函数 $y=f(x+1)$是偶函数,则下列结论不正确的为 (　　)

A. $a=1$　B. $f(x)$的最小正周期 $T=4$

C. $y=f(x)-|\log_6 x|$有4个零点　D. $f(2\,023)>f(2\,022)$

二、选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分)

9.下列结论正确的有 (　　)

A. 若随机变量 ξ,η 满足 $\eta=2\xi+1$,则 $D(\eta)=2D(\xi)+1$

B. 若随机变量 $\xi\sim N(3,\sigma^2)$,且 $P(\xi<6)=0.84$,则 $P(3<\xi<6)=0.34$

C. 若 $P(B|A)=0.3$,$P(B)=0.3$,则事件 A,B 相互独立

D. 某医院住院的8位肺炎患者的潜伏天数分别为10,3,8,3,2,18,7,4,则该样本数据的第50百分位数为5.5

10.已知函数 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像为 C,则 (　　)

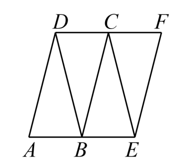
A. 图像 C 关于直线 $x=\frac{5}{12}\pi$ 对称

B. 图像 C 关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$中心对称

C. 将 $y=\cos 2x$ 的图像向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度可以得到图像 C

D. 若把图像 C 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度,得到函数 $g(x)$的图像,则函数 $g(x)$是奇函数

11.已知四面体 $ABCD$ 的一个平面展开图如图所示,其中四边形 $AEFD$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的菱形,B,C 分别为 AE,FD 的中点,$BD=2\sqrt{2}$,则在该四面体中 (　　)



A. $BE\perp CD$　B. BE 与平面 DCE 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{15}$

C. 四面体 $ABCD$ 的内切球半径为$\frac{\sqrt{105}}{30}$　D. 四面体 $ABCD$ 的外接球表面积为 8π

12.古希腊数学家普洛克拉斯指出:“哪里有数,哪里就有美.”“对称美”是数学美的重要组成部分,在数学史上,人类对数学的对称问题一直在思考和探索,图形中对称性的本质就是点的对称、线的对称.如正方形既是轴对称图形,又是中心对称图形,对称性也是函数一个非常重要的性质.如果一个函数的图像经过某个正方形的中心并且能够将它的周长和面积同时平分,那么称这个函数为这个正方形的“优美函数”.下列关于“优美函数”的说法中正确的有 (　　)

A. 函数 $f(x)=\frac{x}{2^x+2^{-x}}(-1\leqslant x\leqslant 1)$可以是某个正方形的“优美函数”

B. 函数 $f(x)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+3$ 只能是边长不超过$\frac{\pi}{2}$的正方形的“优美函数”

C. 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)-1$ 可以是无数个正方形的“优美函数”

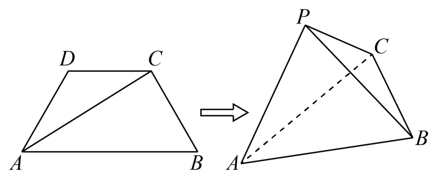
D. 若函数 $y=f(x)$是“优美函数”,则 $y=f(x)$的图像一定是中心对称图形

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13.已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+b^2x+1$,若 a 是从 1,2,3 三个数中任取的一个数,b 是从 1,2 两个数中任取的一个数,则该函数有两个极值点的概率为________.

14.如图,在梯形 $ABCD$ 中,$AB\parallel CD$,$AD=DC=BC=2$,$\angle ABC=60^\circ$,将$\triangle ACD$ 沿边 AC 翻折,使点 D 翻折到点 P,且 $PB=2\sqrt{2}$,则三棱锥 $P\text{-}ABC$ 外接球的表面积是________.



15.设点 P 为抛物线 $x^2=4y$ 上到直线 $2x-y-6=0$ 距离最短的点,且在点 P 处的切线与 x 轴和 y 轴的交点分别是 M 和 N,则过 M,N 两点的最小圆截抛物线的准线所得的弦长为________.

16.项数为 $k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant2)$的有限数列$\{a_n\}$的各项均不小于$-1$的整数,满足 $a_1\cdot2^{k-1}+a_2\cdot2^{k-2}+a_3\cdot2^{k-3}+\cdots+a_{k-1}\cdot2+a_k=0$,其中 $a_1\neq0$.若 $k=2$,则 $a_2=$________;若 $k=3$,则满足条件的数列$\{a_n\}$所有项的和组成的集合为________.

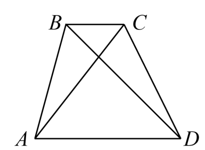
四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(10 分)

如图,在平面四边形 $ABCD$ 中,已知 $BC=1$,$\cos\angle BCD=-\frac{3}{5}$.

(1)若 AC 平分$\angle BCD$,且 $AB=2$,求 AC 的长;

(2)若$\angle CBD=45^\circ$,求 CD 的长.



18.(12 分)

已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,满足 $S_n=2a_n-2(n\in\mathbf{N}^*)$,数列$\{b_n\}$的前 n 项积为 $n!$.

(1)求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

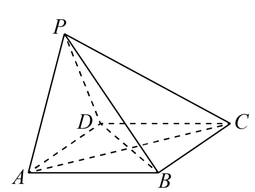
(2)令 $c_n=a_nb_n$,求数列$\{c_n\}$的前 n 项和.

19.(12 分)

如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是矩形,$AB=\sqrt{2}$,$AD=2$,$PA=PD$,$AC\perp PB$.

(1)证明:平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$;

(2)若二面角 $P\text{-}AB\text{-}D$ 的大小为$\frac{\pi}{4}$,求锐二面角 $D\text{-}AP\text{-}C$ 的余弦值.



20.(12 分)

某企业为在推进中国式现代化新征程中展现更大作为,在提升员工敬业精神和员工管理水平上实施新举措制定新方案.现对员工敬业精神和员工管理水平进行评价,从企业中选出 200 人进行统计,其中对员工敬业精神和员工管理水平都满意的有 50 人,对员工敬业精神满意的人数是总人数的 40%,对员工管理水平满意的人数是总人数的 45%.

(1)完成对员工敬业精神和员工管理水平评价的 2×2 列联表,依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,能否认为对员工敬业精神满意与对员工管理水平满意有关联?

	对员工管理水平满意	对员工管理水平不满意	合计
对员工敬业精神满意			
对员工敬业精神不满意			
合计			

(2)若将频率视为概率,随机从企业员工中抽取 3 人参与此次评价,设对员工敬业精神和对员工管理水平都满意的人数为随机变量 X,求 X 的分布列和数学期望;

(3)在统计学中常用 $T(B|A)=\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$表示在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的优势.现从该企业员工中任选一人,A 表示"选到对员工管理水平不满意",B 表示"选到对员工敬业精神不满意",请利用样本数据,估计 $T(B|A)$的值.

附:$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$.

α	0.05	0.01	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

21.(12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,直线 $l:y=kx+m$ 与 C 交于 A,B 两点,当 $k=m=1$ 时,直线 l 经过椭圆的上顶点,且$\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a$.

(1)求 C 的方程;

(2)若 D 为 AB 的中点,O 为坐标原点,当 D 在圆 $x^2+y^2=\frac{3}{4}$上时,求$\triangle OAB$ 面积的最大值.

22.(12 分)

三个互不相同的函数 $y=f(x)$,$y=g(x)$与 $y=h(x)$在区间 D 上恒有 $f(x)\geqslant h(x)\geqslant g(x)$或恒有 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$,则称 $y=h(x)$为 $y=f(x)$与 $y=g(x)$在区间 D 上的"分割函数".

(1)设 $h_1(x)=4x$,$h_2(x)=x+1$,试分别判断 $y=h_1(x)$,$y=h_2(x)$是否是 $y=2x^2+2$ 与 $y=-x^2+4x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上的"分割函数",请说明理由;

(2)求所有的二次函数 $y=ax^2+cx+d(a\neq0)$(用 a 表示 c,d),使得该函数是 $y=2x^2+2$ 与 $y=4x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上的"分割函数";

(3)若$[m,n]\subseteq[-2,2]$,且存在实数 k,b,使得 $y=kx+b$ 为 $y=x^4-4x^2$ 与 $y=4x^2-16$ 在区间$[m,n]$上的"分割函数",求 $n-m$ 的最大值.