

凉山州 2023 届高中毕业班第一次诊断性检测

数学（理科）参考答案及评分意见

评分说明：

1. 本解法给出了一种解法供参考，如果考生的解答与本解法不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则；
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后续部分的解答未改变试题的内容及难度可视影响的程度决定后续部分的给分，但不得超过该部分的正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分；
3. 解答右侧所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数；
4. 只给整数分数，选择题不给中间分。

一、单选题（每小题 5 分，共 60 分）

1-5. BACDB 6-7. DADCA 11-12. CB

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 【答案】 $\frac{2}{3}$ ； 14. 【答案】5； 15. 【答案】13； 16. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

三、解答题（共计 70 分）

17. 解：（1）根据所给数据完成列联表：

	有兴趣	没兴趣	合计
男	55	5	60
女	30	10	40
合计	85	15	100

$$K^2 = \frac{100 \times (55 \times 10 - 5 \times 30)^2}{85 \times 15 \times 40 \times 60} = \frac{800}{153} \approx 5.229 > 5.024$$

所以有 97.5% 的把握认为“该校学生对足球是否有兴趣与性别有关”；……………(6 分)

（2）按照分层抽样的方法，抽取男生 2 人，女生 4 人，

随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2，

$$\therefore P(X=0) = \frac{C_2^0 C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(X=1) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore P(X=2) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

试卷第 1 页，共 5 页



$\therefore X$ 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1.$$

.....(12分)

即 X 的期望为 1.

18. (1) 证明: 取 BC_1 中点 O , 连接 OD , OE , D 为 BC 的中点,

所以 $OD \parallel \frac{1}{2}CC_1$ 且 $OD = \frac{1}{2}CC_1$, 又当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, E 为 AA_1 的中点, $AA_1 \parallel CC_1$,

且 $AA_1 = CC_1$, 所以 $AE \parallel \frac{1}{2}CC_1$, 且 $AE = \frac{1}{2}CC_1$, 所以 $OD \parallel AE$, 且 $OD = AE$.

所以四边形 $ADOE$ 为平行四边形, 所以 $AD \parallel OE$, 因为 $AD \subset$ 平面 BC_1E ,

$OE \subset$ 平面 BC_1E , 所以 $AD \parallel$ 平面 BC_1E .

.....(6分)

(2) 由题意, 可如图建立空间直角坐标系,

所以 $B(0,0,0)$, $C_1(4,0,3)$, $D(2,0,0)$, $E(0,3,3\lambda)$, $(\frac{1}{4} \leq \lambda < \frac{\sqrt{2}}{4})$,

$$\overrightarrow{BC_1} = (4,0,3), \overrightarrow{BE} = (0,3,3\lambda),$$

设平面 BC_1E 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} 4x + 3z = 0 \\ y + 3\lambda z = 0 \end{cases} \text{ 令 } x = 3$$

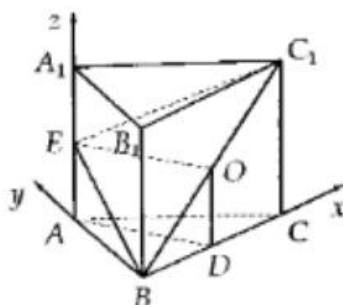
$$\text{得 } \vec{n} = (3, 4\lambda, -4) \text{ 又 } \overrightarrow{DC_1} = (2, 0, 3),$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{DC_1}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{DC_1}|} = \frac{6}{\sqrt{13} \sqrt{16\lambda^2 + 25}}, \text{ 整理得}$$

$$\text{又 } \frac{1}{4} \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 所以, 所以 } \sin \theta \in [\frac{2\sqrt{39}}{39}, \frac{3\sqrt{2}}{13}],$$

$$\text{所以 } \sin \theta \text{ 的取值范围为 } [\frac{2\sqrt{39}}{39}, \frac{3\sqrt{2}}{13}].$$

.....(12分)



19. 解: (1) 因为 $b - c \sin A = a \cos C$,

由正弦定理得 $\sin B - \sin C \sin A = \sin A \cos C$,

$$\text{即 } \sin(A+C) - \sin A \cos C = \sin C \sin A,$$

$$\text{所以 } \cos A \sin C = \sin C \sin A, \text{ 即 } \tan A = 1, A \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{得 } A = \frac{\pi}{4}.$$

.....(6分)



(2) 因为 $b=2$,

$$\text{由正弦定理得 } c = \frac{2\sin C}{\sin B} = \frac{2\sin(\frac{3\pi}{4}-B)}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\tan B} + \sqrt{2},$$

又 $B \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 则 $c \in (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}c \in (1, 2).$$

即, $\triangle ABC$ 面积的取值范围为 $(1, 2)$ (12 分)

20. 解: (1) 因为 $|AB|=2$, 所以 $b=1$.

又点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在图像 C 上, 即 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1$, 所以 $a^2 = 2$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ (5 分)

(2) 设直线 $l: y = kx + t$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, ($x_1 > 0, y_1 > 0$)

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (2k^2 + 1)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0, \text{ 则 } \Delta = 8(2k^2 + 1 - t^2) > 0 \quad (1)$$

$$\text{且 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{2k^2 + 1} \\ x_1 x_2 = \frac{2t^2 - 2}{2k^2 + 1} \end{cases}, \quad (2)$$

$$\text{又 } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -1, \text{ 即 } x_1 x_2 + y_1 y_2 = -1$$

$$\therefore (k^2 + 1)x_1 x_2 + kt(x_1 + x_2) + t^2 = -1,$$

$$\text{将结论 } (2) \text{ 代入得 } t^2 = \frac{1}{3}, \text{ 又 } y_1 + y_2 = \frac{2t}{2k^2 + 1} > 0, \text{ 即 } t > 0, \text{ 所以 } t = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即直线 l 是过定点 $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ (12 分)

21. (1) 解: 因 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (x+1)\ln(x+1) + x + t$,

所以 $g(x) = x - \ln(x+1)$,

$$\text{则 } g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \quad (x > -1),$$

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

又 $x \in (-1, 0)$ 时 $g'(x) < 0$, $x \in (0, +\infty)$ 时 $g'(x) > 0$



所以 $g(x) \geq g(0) = 0$

即 $g(x)$ 的最小值为 0. (3 分)

(2) 证明: 由 (1) 小题结论可知 $x \geq \ln(x+1)$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立,

则 $n \in \mathbb{N}^*$ 时 $\frac{1}{n} \geq \ln(\frac{1}{n}+1)$, 即 $\frac{1}{n} \geq \ln \frac{n+1}{n}$

所以 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n}) = \ln(n+1)$

所以不等式成立. (4 分)

(3) 当 $x > 0$ 时, $x^x - x \ln x + (2-a)x - 1 \geq 0$ 恒成立

等价于不等式 $\frac{x^x - x \ln x + 2x - 1}{x} > a$ 恒成立,

令 $h(x) = \frac{x^x - x \ln x + 2x - 1}{x}$, 则命题等价于 $x \in (0, +\infty)$, $h(x)_{\min} \geq a$

由 (1) 小题结论可知 $e^x > x+1$

所以 $h(x) = \frac{e^{x \ln x} - x \ln x + 2x - 1}{x} > \frac{x \ln x + 1 - x \ln x + 2x - 1}{x} = 2$

当 $x \ln x = 0$, 即 $x=1$ 时能取等号, 所以 $h(x)_{\min} = 2$, 即 $a \leq 2$

a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$ (12 分)

22. 解: (1) 由 $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

得 $\frac{\sqrt{2}}{2} \rho \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sin \theta = \sqrt{2}$

将 $\begin{cases} \rho \cos \theta = x \\ \rho \sin \theta = y \end{cases}$ 代入上式得 $\frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = \sqrt{2}$

即直线 l 的直角坐标方程为 $x + y - 2 = 0$

曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \cos 2\alpha \end{cases}$ (α 为参数)

所以 $y = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, 且 $x = \cos \alpha \in [-1, 1]$

则曲线 C 的普通方程为 $y = 2x^2 - 1$, ($x \in [-1, 1]$). (5 分)

(2) 设 $P(x, 2x^2 - 1)$ ($x \in [-1, 1]$),

则点 P 到直线 l 的距离 $d = \frac{|2x^2 + x - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{25}{8}|}{\sqrt{2}}$.

因为 $x \in [-1, 1]$, 所以 $-\frac{25}{8} \leq 2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{25}{8} \leq 0$ 即 $0 \leq d \leq \frac{25\sqrt{2}}{16}$



即 P 到 l 距离的最大值为 $\frac{25\sqrt{2}}{16}$ (10 分)

23. 解: (1) 由于 $f(x) = |x-2| + |2x+8| = \begin{cases} -3x-6, & x < -4 \\ x+10, & -4 \leq x < 2 \\ 3x+6, & x \geq 2 \end{cases}$

当 $x < -4$ 时, $-3x-6 \leq 9$, 解得 $x \geq -5$, 此时 $-5 \leq x < -4$;

当 $-4 \leq x < 2$ 时, $x+10 \leq 9$, 解得 $x \leq -1$, 此时 $-4 \leq x \leq -1$;

当 $x \geq 2$ 时, $3x+6 \leq 9$, 解得 $x \leq 1$, 此时 $x \in \emptyset$.

综上: $f(x) \leq 9$ 的解集为 $[-5, -1]$ (5 分)

(2) $\because f(x) = |x-2| + |2x+8| \geq |x-2| + |x+4| \geq |(x-2) - (x+4)| = 6$,

当且仅当 $x = -4$ 时等号成立

$\therefore a^2 - a \leq 6$, 即 $a^2 - a - 6 < 0$, 解得 $-2 \leq a \leq 3$. $\therefore a$ 的取值范围是 $[-2, 3]$ (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线