高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-4x-5<0\}$，$B=\{y|y=\ln(x^2+1)\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-1,5)$　　B. $[0,5)$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $[0,1)$

2. 已知复数 $z=\frac{3+i}{1-i}$，则 $|\bar{z}+3i|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{5}$

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为

A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $(1,1)$

C. $(-1,-1)$　　D. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. 在△ABC中，"$\tan A\tan B<1$"是"△ABC为钝角三角形"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

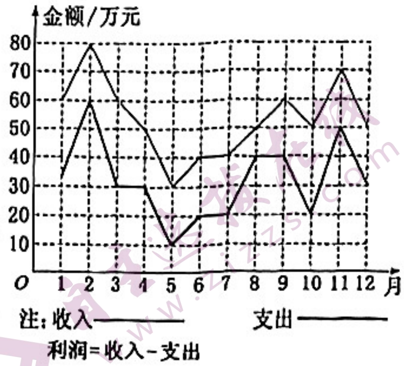
5. 已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且 $a_1a_2a_3=27$，$a_4-a_2=-\frac{8}{3}$，则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为

A. 9　　B. 8　　C. 3　　D. 27

6. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 作直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 M,N 两点，且△MNF_2 是以∠MNF_2 为顶角的等腰直角三角形，若 C 的离心率为 e，则 $e^2=$

A. $5+3\sqrt{3}$　　B. $5+3\sqrt{2}$　　C. $5+2\sqrt{2}$　　D. $5+2\sqrt{3}$

7. 某商场去年一年中各月份的收入、支出情况如图所示，则



A. 月支出最大值与支出最小值的比是 8∶1

B. 4 月至 6 月份的月平均收入为 50 万元

C. 利润最高的月份是 2 月份

D. 2 月至 3 月份的收入的变化率与 11 月至 12 月份的收入的变化率相同

8. 若不等式 $e^{x-1}-mx-2n-3\geqslant 0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，其中 $m\neq 0$，则 $\frac{n}{m}$ 的最大值为

A. $-\frac{\ln 3e}{2}$　　B. $-\ln 3e$　　C. $\ln 3e$　　D. $\frac{\ln 3e}{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AA_1=6$，$AD=2$，则

A. 平面 $AB_1C_1D\perp$ 平面 A_1BCD_1

B. 直线 AB_1 与 CD_1 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$

C. A 到平面 BDD_1B_1 的距离为 $3\sqrt{2}$

D. 直线 A_1B 与 AD_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$

10. 已知函数 $f(x)=\cos x[\ln(2\pi-x)+\ln x]$，则

A. $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称　　B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称

C. $f(\pi+x)$ 是奇函数　　D. $f(x)$ 有 4 个零点

11. 某不透明的袋子中装有 5 个质地、大小均相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，事件 A=“第一次取出的球的数字是 1”，事件 B=“第二次取出的球的数字是 2”，事件 C=“两次取出的球的数字之和是 7”，事件 D=“两次取出的球的数字之和是 6”，则

A. A 与 C 相互独立　　B. B 与 D 相互独立

C. A 与 D 相互独立　　D. B 与 C 相互独立

12. 已知抛物线 C：$x^2=-8y$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于 A，B 两点，分别过 A，B 两点作 C 的切线 l_1，l_2，且 l_1，l_2 相交于点 P，则

A. $|PF|=4$　　B. 点 P 在直线 $y=2$ 上

C. $\triangle PAB$ 为直角三角形　　D. $\triangle PAB$ 面积的最小值为 16

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知圆 C：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$，则过原点且与 C 相切的直线方程为________.

14. 五位同学站成一排合影，张三站在最右边，李四、王五相邻，则不同的站法种数为________.

15. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，三条棱 PA，PB，PC 两两垂直，且 $PA=PB=PC=2$，则平面 ABC 截该三棱锥的外接球所得截面圆的面积为________.

16. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数，$f(x-2)$ 为奇函数，$f(2x-1)$ 为偶函数，则 $\sum_{i=0}^{16} f(i)=$________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为 S_n，$a_2+S_3=20$，$a_5=14$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 T_n. 并证明 $T_n<\frac{1}{6}$.

18.（本小题满分 12 分）

已知△ABC 的角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sin A(c\cos B+b\cos C)-c\sin B=c\sin C+b\sin B$，

(1)求角 A；

(2)若 AD 平分$\angle BAC$ 交线段 BC 于点 D，且 $AD=2$，$BD=2CD$，求△ABC 的周长.

19.（本小题满分 12 分）

某校为了缓解高三学子复习压力，举行“趣味数学”闯关活动，规定每人从 10 道题中随机抽 3 道回答，至少答对 2 题即可闯过第一关，某班有 5 位同学参加闯关活动，假设每位同学都能答对 10 道题中的 6 道题，且每位同学能否闯过第一关相互独立.

(1)求 B 同学闯过第一关的概率；

(2)求这 5 位同学闯过第一关的人数 X 的分布列和数学期望.

20.(本小题满分 12 分)

如图 1,四边形 $ABCD$ 是梯形,$AB /\!/ CD$,$AD=DC=CB=\frac{1}{2}AB=4$,M 是 AB 的中点,将$\triangle ADM$ 沿 DM 折起至$\triangle A'DM$,如图 2,点 N 在线段 $A'C$ 上.

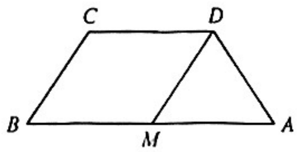


图 1

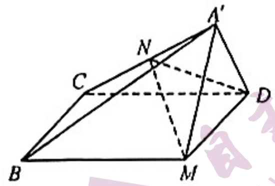


图 2

(1)若 N 是 $A'C$ 的中点,求证:平面 $DNM\perp$平面 $A'BC$;

(2)若 $A'C=2\sqrt{6}$,平面 DNM 与平面 CDM 夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$,求$\frac{A'N}{NC}$.

21.(本小题满分 12 分)

已知 $A(-2\sqrt{2},0)$,$B(2\sqrt{2},0)$,直线 PA,PB 的斜率之积为$-\frac{3}{4}$,记动点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求 C 的方程;

(2)直线 l 与曲线 C 交于 M,N 两点,O 为坐标原点,若直线 OM,ON 的斜率之积为$-\frac{3}{4}$,证明:$\triangle MON$ 的面积为定值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2-(a^2+2)x+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$的单调区间;

(2)当 $x\geqslant e^2$ 时,$f(x)+(a^2-3a+2)x+(a^2-a)\ln x\geqslant 0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

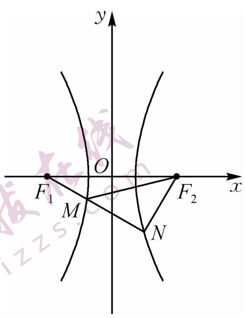
1. B　因为 $A=(-1,5)$，$B=[0,+\infty)$，所以 $A\cap B=[0,5)$. 故选 B.

2. A　$z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1+2\mathrm{i}$，$|\bar{z}+3\mathrm{i}|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$. 故选 A.

3. B　设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4+2\times2\sqrt{2}\cos\theta+2=10$，所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=(1,1)$. 故选 B.

4. C　$\tan A\tan B<1\Leftrightarrow1-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}>0\Leftrightarrow\dfrac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}>0\Leftrightarrow\dfrac{-\cos C}{\cos A\cos B}>0\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C<0\Leftrightarrow\triangle ABC$ 为钝角三角形. 所以在 $\triangle ABC$ 中，“$\tan A\tan B<1$”是“$\triangle ABC$ 为钝角三角形”的充要条件. 故选 C.

5. D　设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$，由题意，得 $\begin{cases}a_1a_2a_3=27,\\ a_4-a_2=-\dfrac{8}{3},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=3,\\ a_4=\dfrac{1}{3},\end{cases}\Rightarrow\dfrac{a_4}{a_2}=q^2=\dfrac{1}{9}\Rightarrow q=\dfrac{1}{3}$，$a_n=a_2q^{n-2}=3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-3}$，则 $a_1=9,a_2=3,a_3=1,a_4=\dfrac{1}{3},\cdots$，所以当 $n=2$，或 $n=3$ 时，$a_1a_2\cdots a_n$ 最大，且最大值为 27. 故选 D.



6. C　法一：由双曲线定义，得 $|NF_1|-|NF_2|=2a$，又因为 $\triangle MNF_2$ 为等腰直角三角形，所以 $|MF_1|=2a$，从而 $|MF_2|=4a$. 在 $\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定理，得 $|F_1F_2|^2=|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1|\cdot|MF_2|\cos\dfrac{3}{4}\pi$. 设 $|F_1F_2|=2c$，则 $|2c|^2=|2a|^2+|4a|^2-2\cdot2a\cdot4a\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=20a^2+8\sqrt{2}a^2$，解得 $\dfrac{c^2}{a^2}=5+2\sqrt{2}$，所以 $e^2=5+2\sqrt{2}$. 故选 C.

法二：如图，由题意，得 $|NF_1|-|NF_2|=2a$，由 $|MN|=|NF_2|$，得 $|MF_1|=2a$，$|MF_2|=4a$，$|NM|=|NF_2|=2\sqrt{2}a$，$|NF_1|=|MF_1|+|MN|=(2+2\sqrt{2})a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle NF_1F_2$ 中，由勾股定理，得 $(2c)^2=(2+2\sqrt{2})^2a^2+8a^2$，解得 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=5+2\sqrt{2}$. 故选 C.

7. D　由图可知，月支出最大值为 60 万元，月支出最小值为 10 万元，其比是 6∶1，故 A 错误；由图可知，4 月至 6 月份的平均收入为 $\dfrac{1}{3}\times(50+30+40)=40$(万元)，故 B 错误；由图可知，利润最高的月份为 3 月份和 10 月份，故 C 错误；由图可知，2 月至 3 月份的收入的变化率为 $\dfrac{60-80}{3-2}=-20$，11 月至 12 月份的收入的变化率为 $\dfrac{50-70}{12-11}=-20$. 故选 D.

8. A　法一：$e^{x-1}-mx-2n-3\geqslant0$ 即 $e^{x-1}-3\geqslant mx+2n$，令 $f(x)=e^{x-1}-3$，$g(x)=mx+2n$，则 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，即曲线 $y=e^{x-1}-3$ 在 $(x_0,e^{x_0-1}-3)$ 处的切线方程为 $g(x)=mx+2n$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立. 因为 $f'(x_0)=e^{x_0-1}$，其切线方程为 $y=e^{x_0-1}x+e^{x_0-1}-3-x_0e^{x_0-1}$，所以 $\begin{cases}m=e^{x_0-1},\\ 2n=e^{x_0-1}-3-x_0e^{x_0-1},\end{cases}$ 且 $m>0$，得 $2n=-3-m\ln m$，所以 $\dfrac{n}{m}=-\dfrac{3}{2m}-\dfrac{\ln m}{2}$，令 $h(m)=-\dfrac{3}{2m}-\dfrac{\ln m}{2}$，所以 $h'(m)=\dfrac{3}{2m^2}-\dfrac{1}{2m}=\dfrac{3-m}{2m^2}$，从而 $h(m)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，则 $\dfrac{n}{m}$ 的最大值为 $h(3)=-\dfrac{\ln 3e}{2}$. 故选 A.

法二：设 $f(x)=e^{x-1}-mx-2n-3$，则 $f'(x)=e^{x-1}-m$，当 $m<0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上没有最小值，且当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，此时不合题意；当 $m>0$ 时，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<1+\ln m$；$f'(x)>0\Leftrightarrow x>1+$

$\ln m$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1+\ln m)$ 上为减函数，在 $(1+\ln m,+\infty)$ 上为增函数，从而 $f(x)_{\min}=f(1+\ln m)=-m\ln m-2n-3$. 若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，只需 $f(x)_{\min}=-m\ln m-2n-3\geqslant 0$，解得 $2n\leqslant -m\ln m-3$，于是 $\frac{n}{m}\leqslant\frac{-m\ln m-3}{2m}$. 令 $g(x)=-\frac{1}{2}\left(\ln m+\frac{3}{m}\right)(m>0)$，则 $g'(m)=-\frac{m-3}{2m^2}$，可得 $g(m)_{\max}=g(3)=-\frac{\ln 3e}{2}$，所以 $\frac{n}{m}$ 的最大值为 $-\frac{\ln 3e}{2}$. 故选 A.

9. AB　由题意可得 $A_1B\perp AB_1$，$A_1B\perp B_1C_1\Rightarrow A_1B\perp$ 平面 AB_1C_1D，又 $A_1B\subset$ 平面 A_1BCD_1，所以平面 $AB_1C_1D\perp$ 平面 A_1BCD_1，故 A 正确；直线 AB_1 与直线 CD_1 异面垂直，故 B 正确；过 A 做 AE 垂直于 BD，垂足为 E，易证 $AE\perp$ 平面 BDD_1B_1，$AE=\frac{AD\cdot AB}{BD}=\frac{3}{5}\sqrt{10}$，故 C 错误；$D_1C$ 与 AD_1 的夹角即为 A_1B 与 AD_1 的夹角，而 $AC=2\sqrt{10}$，$AD_1=2\sqrt{10}$，$D_1C=6\sqrt{2}$，显然 D_1C 与 AD_1 的夹角不等于 $\frac{\pi}{3}$，故 D 错误. 故选 AB.

10. BD　$f(x)=\cos x[\ln(2\pi-x)+\ln x]=\cos x\ln(-x^2+2\pi x)=\cos x\ln[-(x-\pi)^2+\pi^2]$，$f(2\pi-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，故 A 错误，B 正确；$f(x)$ 的定义域为 $(0,2\pi)$，$f(x+\pi)$ 的定义域为 $(-\pi,\pi)$，$g(x)=f(\pi+x)=\cos(\pi+x)[\ln(\pi-x)+\ln(\pi+x)]=-\cos x\ln(\pi^2-x^2)$ 为偶函数，故 C 错误；当 $x\in(0,2\pi)$ 时，由 $f(x)=0$，得 $\cos x=0$，或 $\ln(2\pi-x)+\ln x=0$. 由 $\cos x=0$，解得 $x_1=\frac{\pi}{2}$，或 $x_2=\frac{3}{2}\pi$；由 $\ln(2\pi-x)+\ln x=0$，得 $-x^2+2\pi x=1$，解得 $x_3=\pi-\sqrt{\pi^2-1}\in(0,2\pi)$，$x_4=\pi+\sqrt{\pi^2-1}\in(0,2\pi)$. 综上，$f(x)$ 有 4 个零点，故 D 正确. 故选 BD.

11. BC　袋中 5 个球，有放回的随机取两次，每次取 1 个，样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 5,1\leqslant y\leqslant 5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$，元素个数为 25.

$A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$，共 5 个元素，则 $P(A)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$；

$B=\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2)\}$，共 5 个元素，则 $P(B)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$；

$C=\{(2,5),(3,4),(4,3),(5,2)\}$，共 4 个元素，则 $P(C)=\frac{4}{25}$；

$D=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$，共 5 个元素，则 $P(D)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

$AC=\varnothing$，则 $P(AC)=0$，而 $P(A)P(C)=\frac{4}{125}$，所以 $P(AC)\neq P(A)P(C)$，即 A 与 C 不相互独立，A 错误；

$BD=\{(4,2)\}$，则 $P(BD)=\frac{1}{25}$，而 $P(B)P(D)=\frac{1}{25}$，所以 $P(BD)=P(B)P(D)$，即 B 与 D 相互独立，B 正确；

$AD=\{(1,5)\}$，则 $P(AD)=\frac{1}{25}$，而 $P(A)P(D)=\frac{1}{25}$，所以 $P(AD)=P(A)P(D)$，即 A 与 D 相互独立，C 正确；

$BC=\{(5,2)\}$，则 $P(BC)=\frac{1}{25}$，而 $P(B)P(C)=\frac{4}{125}$，所以 $P(BC)\neq P(B)P(C)$，即 B 与 C 不相互独立，D 错误. 故选 BC.

12. BCD　由题意知，直线 l 的斜率存在且与 C 有两个交点，设方程为 $y=kx-2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$，由 $\begin{cases}x^2=-8y,\\ y=kx-2,\end{cases}$ 得 $x^2+8kx-16=0$，则 $x_1+x_2=-8k$，$x_1x_2=-16$. 抛物线 C 的方程可化为 $y=-\frac{x^2}{8}$，则 $y'=-\frac{x}{4}$，从而 l_1 的方程为 $y=-\frac{x_1}{4}(x-x_1)-\frac{x_1^2}{8}$，即 $y=-\frac{x_1}{4}x+\frac{x_1^2}{8}$，同理可得，$l_2$ 的方程为 $y=-\frac{x_2}{4}x+\frac{x_2^2}{8}$. 由 $\begin{cases}y=-\frac{x_1}{4}x+\frac{x_1^2}{8},\\ y=-\frac{x_2}{4}x+\frac{x_2^2}{8},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2},\\ y=-\frac{x_1x_2}{8},\end{cases}$ 所以 $P(-4k,2)$，即点 P 在直线 $y=2$ 上，则 B 正确；又 $k_{PA}k_{PB}=\left(-\frac{x_1}{4}\right)\left(-\frac{x_2}{4}\right)=\frac{x_1x_2}{16}=-1$，则 C 正

确；$|PF|=\sqrt{(-4k)^2+(2+2)^2}=\sqrt{16k^2+16}$，则A错误；因为 $k_{PF}\cdot k_l=\frac{2-(-2)}{-4k-0}\cdot k=-1$，所以 $PF\perp AB$，$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB||PF|=\frac{1}{2}\sqrt{(1+k^2)[(-8k)^2-4\times(-16)]}\times\sqrt{16k^2+16}=16(k^2+1)^{\frac{3}{2}}\geqslant 16$，$k=0$ 时取等号，则D正确.故选BCD.

13. $x=0$ 或 $3x+4y=0$　当切线斜率不存在时，直线 $x=0$ 满足题意；当斜率存在时，设切线方程为 $y=kx$，由 $d=\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=-\frac{3}{4}$，所以切线方程为 $y=-\frac{3}{4}x$，即 $3x+4y=0$．综上，所求切线方程为 $x=0$ 或 $3x+4y=0$.

14. 12　第一步：确定张三位置在最右边，有1种方法；第二步：李四和王五捆绑有 A_2^2 种方法；第三步：除张三外的同学进行排列有 A_3^3 种方法.根据分步计数原理，共有 $A_2^2A_3^3=12$ 种不同的方法.

15. $\frac{8}{3}\pi$　将该三棱锥放在正方体中，使 PA,PB,PC 为其三条棱，该正方体的外接球即为该三棱锥的外接球，所以球的半径 $R=\sqrt{3}$，球心 O 到平面 ABC 的距离为 $d=\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以截面圆的半径 $r=\sqrt{R^2-d^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，从而所求截面圆的面积为 $S=\pi r^2=\frac{8}{3}\pi$.

16. 0　法一：因为 $f(2x-1)$ 是偶函数，所以 $f(-2x-1)=f(2x-1)$，所以 $f(-x-1)=f(x-1)$，即 $f(-2-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称；因为 $f(x-2)$ 是奇函数，所以 $f(x-2)=-f(-x-2)$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-2,0)$ 对称，易知 $f(x-2)=-f(-x-2)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期函数，且4是 $f(x)$ 的一个周期；由 $f(x-2)=-f(-x-2)=-f(4-x-2)=-f(2-x)$，得 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数；在 $f(x-2)=f(-x)$ 中，令 $x=-1$，得 $f(-3)=f(1)=-f(3)$，所以 $f(1)+f(3)=0$；在 $f(x-2)=f(-x)$ 中，令 $x=-2$，得 $f(-4)=f(2)=-f(4)$，所以 $f(2)+f(4)=0$，从而 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，所以 $\sum\limits_{i=0}^{16}f(i)=f(0)+4[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=0$.

法二：取 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，定义域为 $\mathbf{R}$，则 $f(x-2)=\sin\frac{\pi}{2}(x-2)=-\sin\frac{\pi}{2}x$ 为奇函数，$f(2x-1)=\sin\frac{\pi}{2}(2x-1)=-\cos\pi x$ 为偶函数. $f(x)$ 符合所有条件，且是以4为周期的周期函数，$f(0)=0$，$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1+0+(-1)+0=0$，所以 $\sum\limits_{i=0}^{16}f(i)=f(0)+4[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=0$.

17. 解：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题意，得 $\begin{cases}4a_1+4d=20,\\a_1+4d=14,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=3.\end{cases}$ ………… 3分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-1$. ………… 5分

(2)令 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，则 $b_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$. ………… 7分

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2})=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)<\frac{1}{6}$. ………… 10分

18. 解：(1)由余弦定理，得 $c\cos B+b\cos C=c\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=a$， ………… 2分

所以 $\sin A(c\cos B+b\cos C)-c\sin B=c\sin C+b\sin B$，可化为 $a\sin A-c\sin B=c\sin C+b\sin B$. ………… 4分

再由正弦定理，得 $a^2-cb=c^2+b^2$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$.

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2}{3}\pi$. ………… 6分

(2)因为 AD 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{3}$.

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BAD}+S_{\triangle CAD}\Rightarrow\frac{1}{2}b\cdot c\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\frac{\pi}{3}$，

得 $bc=2b+2c$. ………………………………………………………………………………………… 8 分

作 $AE\perp BC$ 于 E，

则 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}BD\cdot AE}{\frac{1}{2}CD\cdot AE}\Rightarrow\frac{c}{b}=\frac{BD}{DC}=2$. ………………………………………… 10 分

由 $\begin{cases}bc=2b+2c,\\c=2b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c=6,\\b=3,\end{cases}$

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=63$，所以 $a=3\sqrt{7}$. ………………………………………… 11 分

故△ABC 的周长为 $9+3\sqrt{7}$. ………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1) B 同学闯过第一关的情况有答对 2 题和答对 3 题，故 B 同学闯过第一关的概率

$P=\frac{C_6^3+C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{2}{3}$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2) 由题意可知 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,4,5，且 X 服从二项分布，即 $X\sim B\left(5,\frac{2}{3}\right)$. ……………………… 6 分

$P(X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$，$P(X=1)=C_5^1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$，

$P(X=2)=C_5^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{243}$，$P(X=3)=C_5^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$，

$P(X=4)=C_5^4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{80}{243}$，$P(X=5)=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$. ………………………………………… 10 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

………………………… 11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{243}+1\times\frac{10}{243}+2\times\frac{40}{243}+3\times\frac{80}{243}+4\times\frac{80}{243}+5\times\frac{32}{243}=\frac{10}{3}$. ……………………………… 12 分

或 $E(X)=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$. ………………………………………………………………………… 12 分

20. (1) 证明：取 DM 中点 O，连接 $A'O$，CO，易证 $DM\perp$ 平面 $A'CO$，所以 $DM\perp A'C$. ………………………… 2 分

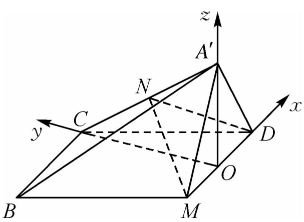
又因为 $DC=DA'=4$，所以 $DN\perp A'C$，而 $DN\cap DM=D$，所以 $A'C\perp$ 平面 DMN，

又 $A'C\subset$ 平面 $A'BC$，所以平面 $A'BC\perp$ 平面 DMN. ………………………………………………… 4 分

(2) 解：易求得 $OC=OA'=2\sqrt{3}$，又 $A'C=2\sqrt{6}$，所以 $OC^2+OA'^2=A'C^2$，可得 $OC\perp OA'$，

而 $A'O\perp OD$，$CO\perp OD$. ………………………………………………………………… 5 分

以 O 为坐标原点，分别以 OD，OC，OA' 所在直线为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $D(2,0,0)$，$M(-2,0,0)$，$C(0,2\sqrt{3},0)$，$A'(0,0,2\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{A'N}=\lambda\overrightarrow{A'C}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{A'N}=(0,2\sqrt{3}\lambda,-2\sqrt{3}\lambda)$，得 $N(0,2\sqrt{3}\lambda,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda)$，……………………… 7 分

所以$\overrightarrow{DN}=(-2,2\sqrt{3}\lambda,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{MD}=(4,0,0)$.

设平面 DMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{MD}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\\overrightarrow{DN}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x=0,\\-2x+2\sqrt{3}\lambda y+(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda)z=0,\end{cases}$

令 $y=\lambda-1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(0,\lambda-1,\lambda)$；

易得平面 DMC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$. ………………………………………… 9 分

设平面 DMN 与平面 DMC 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即$\left|\dfrac{\lambda}{\sqrt{(\lambda-1)^2+\lambda^2}}\right|=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$，

解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$，或 $\lambda=2$(舍去). ………………………………………… 11 分

所以$\dfrac{A'N}{NC}=2$. ………………………………………… 12 分

21.(1)解：设 $P(x,y)$，则直线 PA 的斜率 $k_{PA}=\dfrac{y}{x+2\sqrt{2}}(x\neq-2\sqrt{2})$，直线 PB 的斜率 $k_{PB}=\dfrac{y}{x-2\sqrt{2}}(x\neq2\sqrt{2})$.

………………………………………… 2 分

由题意 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y}{x+2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y}{x-2\sqrt{2}}=\dfrac{y^2}{x^2-8}=-\dfrac{3}{4}$，化简得$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1(x\neq\pm2\sqrt{2})$. ……………… 4 分

(2)证明：当直线 l 的斜率存在时，可设其方程为 $y=kx+m$，

联立$\begin{cases}y=kx+m,\\\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1,\end{cases}$化简得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-24=0$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-24)=48(8k^2+6-m^2)>0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-24}{3+4k^2}$. ………………………………………… 6 分

所以 $k_{OM}\cdot k_{ON}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2}=\dfrac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=\dfrac{\dfrac{4m^2k^2-24k^2-8k^2m^2+3m^2+4k^2m^2}{3+4k^2}}{\dfrac{4m^2-24}{3+4k^2}}$

$=\dfrac{-24k^2+3m^2}{4m^2-24}=-\dfrac{3}{4}$，

化简得 $m^2=4k^2+3$，………………………………………… 8 分

则 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{1+k^2}\sqrt{48(8k^2+6-m^2)}}{3+4k^2}=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2+3}}{4k^2+3}=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{3+4k^2}}$，

又 O 到 MN 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{4k^2+3}}{\sqrt{1+k^2}}$，………………………………………… 10 分

所以 $S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{3+4k^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3+4k^2}}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{3}$，为定值.

当直线 l 的斜率不存在时，可设 $M(x_0,y_0)$，$N(x_0,-y_0)$，

则 $k_{OM}\cdot k_{ON}=-\dfrac{y_0^2}{x_0^2}=-\dfrac{3}{4}$，且$\dfrac{x_0^2}{8}+\dfrac{y_0^2}{6}=1$，解得 $x_0^2=4$，$y_0^2=3$，此时 $S_{\triangle OMN}=2\times\dfrac{1}{2}\times|x_0y_0|=2\sqrt{3}$.

综上，$\triangle OMN$ 的面积为定值 $2\sqrt{3}$. ………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2-3x+\ln x$，其定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$，………………………………………………………… 2 分

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$；令 $f'(x)<0$，得 $\frac{1}{2}<x<1$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $(1,+\infty)$；单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$. ……………………………… 4 分

(2) $f(x)+(a^2-3a+2)x+(a^2-a)\ln x=x^2-3ax+a^2\ln x$，

令 $g(x)=x^2-3ax+a^2\ln x$，则当 $x\geqslant e^2$ 时，$g(x)\geqslant 0$ 恒成立.

$g'(x)=2x-3a+\frac{a^2}{x}=\frac{2x^2-3ax+a^2}{x}=\frac{(2x-a)(x-a)}{x}$. ……………………………………………………… 5 分

①若 $a\leqslant 0$，则 $g'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\geqslant e^2$ 时，$g(x)\geqslant g(e^2)=e^4-3ae^2+2a^2>0$ 恒成立，

所以 $a\leqslant 0$ 符合题意. ……………………………………………………………………………………………… 6 分

②若 $a>0$，由 $g'(x)>0$，得 $0<x<\frac{a}{2}$ 或 $x>a$；由 $g'(x)<0$，得 $\frac{a}{2}<x<a$，

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 和 $(a,+\infty)$，$g(x)$ 的单调递减区间为 $\left(\frac{a}{2},a\right)$.

(ⅰ) 当 $e^2<\frac{a}{2}$，即 $a>2e^2$ 时，

$g(x)$ 在 $\left[e^2,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{a}{2},a\right)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

所以对 $\forall x\in[e^2,+\infty)$，要使 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立，只需 $\begin{cases} g(e^2)\geqslant 0, \\ g(a)\geqslant 0, \end{cases}$

而 $\begin{cases} g(e^2)=2a^2-3ae^2+e^4=(2a-e^2)(a-e^2)\geqslant 0, \\ g(a)=a^2-3a^2+a^2\ln a=a^2(\ln a-2)\geqslant 0 \end{cases}$ 成立，所以 $a>2e^2$ 符合题意；……………………………… 9 分

(ⅱ) 当 $\frac{a}{2}\leqslant e^2<a$，即 $e^2<a\leqslant 2e^2$ 时，则 $g(x)$ 在 $[e^2,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. 所以对 $\forall x\in[e^2,+\infty)$，要使 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立，只需 $g(a)\geqslant 0$ 即可，

而 $g(a)=a^2-3a^2+a^2\ln a=a^2(\ln a-2)\geqslant 0$ 成立，所以 $e^2<a\leqslant 2e^2$ 符合题意；……………………………… 10 分

(ⅲ) 当 $e^2\geqslant a$，即 $0<a\leqslant e^2$ 时，$g(x)$ 在 $[e^2,+\infty)$ 上单调递增，所以对 $\forall x\in[e^2,+\infty)$，要使 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立，只需 $g(e^2)=e^4-3ae^2+2a^2=(2a-e^2)(a-e^2)\geqslant 0$，

可见，$0<a\leqslant\frac{e^2}{2}$ 符合题意. ……………………………………………………………………………………… 11 分

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{e^2}{2}\right]\cup[e^2,+\infty)$. ……………………………………………………… 12 分