中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 9 月测试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
B	B	B	A	C	A	C	D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对但不全的得 3 分，有错选的得 0 分．

9	10	11	12
ABD	ABD	BCD	ABC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$-\dfrac{24}{25}$　　14．-46

15．$\dfrac{64}{3}$　　16．1

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

（1）$\because S_n=\dfrac{n^2+n}{2},\therefore S_{n-1}=\dfrac{(n-1)^2+n-1}{2}$，

$\therefore S_n-S_{n-1}=n=c_n\left(n>1,n\in\mathbf{N}\right)$ ……………………2 分

又 $c_1=S_1=1,\therefore c_n=n\left(n\in\mathbf{N}^+\right),\therefore a_n=3^n$ ……………………3 分

（2）$\because d_n=3^n\times\left(2n^2+6n+5\right)=\left[(n+1)^2+1\right]\times3^{n+1}-\left(n^2+1\right)\times3^n$ ……………………7 分

$\therefore T_n=\left(2^2+1\right)\times3^2-\left(1^2+1\right)\times3+\left(3^2+1\right)\times3^3-\left(2^2+1\right)\times3^2+\cdots+$

$\left(n^2+1\right)\times3^n-\left[(n-1)^2+1\right]\times3^{n-1}+\left[(n+1)^2+1\right]\times3^{n+1}-\left(n^2+1\right)\times3^n$

$=-\left(1^2+1\right)\times3+\left[(n+1)^2+1\right]\times3^{n+1}$

$=\left(n^2+2n+2\right)\times3^{n+1}-6$ ……………………10 分

18．（12 分）

（1）$\because c=2a\cos A\cos B-b\cos2A\left(A\le B\right)$，

$\therefore \sin C = 2\sin A\cos A\cos B - \sin B\cos 2A$ ··2 分

$\therefore \sin C = \sin 2A\cos B - \sin B\cos 2A = \sin(2A-B) > 0$ ····································4 分

又 $0 < 2A-B < \pi$，则 $C = 2A-B$ 或 $C+2A-B=\pi$，

若 $C = 2A-B$，则 $A=\dfrac{\pi}{3}$；

若 $C+2A-B=\pi$，则 $A=2B$，又 $A\le B$，不符合题意，舍去，

综上所述 $A=\dfrac{\pi}{3}$ ···6 分

（2）$\because 2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}, \therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}, \therefore \left(\overrightarrow{AD}\right)^2=\left(\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\right)^2$ ······························8 分

$\therefore b^2+4c^2+2bc=36$ ①，又 $a^2=b^2+c^2-bc$ ②，

①÷②得：$\dfrac{36}{a^2}=\dfrac{4c^2+b^2+2bc}{b^2+c^2-bc}=\dfrac{4\left(\dfrac{c}{b}\right)^2+2\left(\dfrac{c}{b}\right)+1}{\left(\dfrac{c}{b}\right)^2-\left(\dfrac{c}{b}\right)+1}$ ································9 分

令 $\dfrac{c}{b}=x$，又 $A\le B, \therefore a\le b, \therefore a^2\le b^2, \therefore b^2+c^2-bc\le b^2$，

$\therefore c\le b, \therefore 0<\dfrac{c}{b}=x\le 1$，

令 $f(x)=\dfrac{4x^2+2x+1}{x^2-x+1}(0<x\le 1), \because f(x)=4+\dfrac{6x-3}{x^2-x+1}$ ······························10 分

令 $6x-3=t, x=\dfrac{t+3}{6}$，

$\therefore f(t)=4+\dfrac{36t}{t^2+27}(-3<t\le 3), \therefore f(t)=4+\dfrac{36}{t+\dfrac{27}{t}}(-3<t\le 3)$，

又 $t+\dfrac{27}{t}\ge 12$ 或 $t+\dfrac{27}{t}<-12, \therefore 1<f(t)\le 7, \therefore \dfrac{36}{a^2}\le 7, \therefore a\ge \dfrac{6\sqrt{7}}{7}$，

所以当三角形 ABC 为等边三角形时 a 最小，最小值为 $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$ ······························ 12 分

19.（12 分）

（1）设事件 A_1 为 A 员工答对甲类问题；设事件 A_2 为 A 员工答对乙类问题；

设事件 B_1 为 B 员工答对甲类问题；设事件 B_2 为 B 员工答对乙类问题；

设事件C_1为 C 员工答对甲类问题；设事件C_2为 C 员工答对乙类问题；

三人得分之和为 20 分的情况有：

①A 员工答对甲类题，答错乙类题；B 与 C 员工均答错甲类题，

则 $P\left(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{B_1}\cdot\overline{C_1}\right)=P\left(A_1\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{B_1}\right)P\left(\overline{C_1}\right)=0.5\times0.4\times0.4\times0.6=0.048$

……………………………………………………………………………………………2 分

②B 员工答对甲类题，答错乙类题；A 与 C 员工均答错甲类题，

$P\left(B_1\cdot\overline{B_2}\cdot\overline{A_1}\cdot\overline{C_1}\right)=P\left(B_1\right)P\left(\overline{B_2}\right)P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{C_1}\right)=0.6\times0.5\times0.5\times0.6=0.09$

……………………………………………………………………………………………4 分

③C 员工答对甲类题，答错乙类题；A 与 B 员工均答错甲类题，

$P\left(C_1\cdot\overline{C_2}\cdot\overline{A_1}\cdot\overline{B_1}\right)=P\left(C_1\right)P\left(\overline{C_2}\right)P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{B_1}\right)=0.4\times0.25\times0.5\times0.4=0.02$，

所以三人得分之和为 20 分的概率为 0.048+0.09+0.02=0.158……………………………6 分

（2）∵A 员工得 100 分的概率为$P\left(A_1\cdot A_2\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right)=0.3$，

B 员工得 100 分的概率为$P\left(B_1\cdot B_2\right)=P\left(B_1\right)\cdot P\left(B_2\right)=0.3$，

C 员工得 100 分的概率为$P\left(C_1\cdot C_2\right)=P\left(C_1\right)\cdot P\left(C_2\right)=0.3$，

……………………………………………………………………………………………9 分

$\therefore X\sim B(3,0.3)$ ……………………………………………………………………11 分

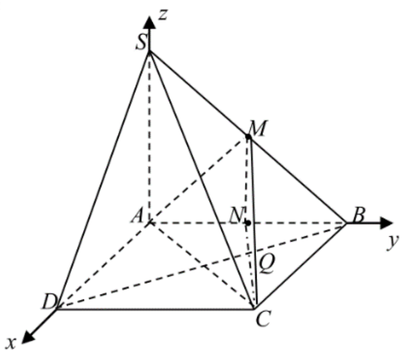
$\therefore E\left(X\right)=3\times0.3=0.9$ ………………………………………………………… 12 分

20．（12 分）

（1）取 AB 的中点 N，连接 MN，NC，则线段 MN 为三角形 SAB 的中位线，

$\therefore MN // SA$，又 $SA\perp BD,\therefore BD\perp MN$ ……………………………………………2 分

设直线 CN 与直线 BD 交于 Q 点，



则 $\Delta BNQ\sim\Delta CDQ,\therefore\dfrac{NQ}{NC}=\dfrac{BQ}{BD}=\dfrac{1}{3}$，

设 $AD=a,\therefore CD=\sqrt{2}a,\therefore NC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a,\therefore NQ=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$，

同理 $BD=\sqrt{3}a,BQ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，

又 $NQ^2+BQ^2=\dfrac{a^2}{6}+\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{a^2}{2}=BN^2$ ……………………………………………5 分

$\therefore BD\perp CN,\therefore BD\perp$面$MNC,\therefore MC\perp BD$ ……………………………………………6 分

（2）分别以直线 AD，AB，AS 为 x 轴，y 轴，z 轴建立直角坐标系，

则 $A(0,0,0),S(0,0,2),C\left(2,2\sqrt{2},0\right),B\left(0,2\sqrt{2},0\right),M\left(0,\sqrt{2},1\right)$，

设 $\overrightarrow{SP}=\lambda\overrightarrow{SC}$，

$\therefore P\left(2\lambda,2\sqrt{2}\lambda,2(1-\lambda)\right),\therefore \overrightarrow{AP}=\left(2\lambda,2\sqrt{2}\lambda,2(1-\lambda)\right)$ ……………………………8 分

又 $\overrightarrow{AM}=\left(0,\sqrt{2},1\right),\overrightarrow{AC}=\left(2,2\sqrt{2},0\right)$，

设平面 AMC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=\sqrt{2}y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2\sqrt{2}y=0\end{cases},\therefore \vec{n}=\left(-\sqrt{2},1,-\sqrt{2}\right)$ …………………………………… 10 分

设直线 AP 与平面 AMC 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AP},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|2\sqrt{2}(1-\lambda)\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{16\lambda^2-8\lambda+4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \lambda=\dfrac{1}{2},\therefore \dfrac{SP}{SC}=\dfrac{1}{2}$ …………………………………………………………………………… 12 分

21．（12 分）

（1）设 $|MF_1|=r_1,|MF_2|=r_2$，在 ΔMF_1F_2 中，设 $\angle F_1MF_2=\theta$，

$|F_1F_2|^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=4c^2$，

$\therefore 2r_1r_2\cos\theta=r_1^2+r_2^2-4c^2$，又 $\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{MC}^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{MF_1}^2+\overrightarrow{MF_2}^2+2\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\theta\right)=\dfrac{r_1^2}{2}+\dfrac{r_2^2}{2}-c^2$，

$\therefore MC^2=\dfrac{r_1^2}{2}+\dfrac{r_2^2}{2}-c^2=\dfrac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2}{2}-c^2=2a^2-c^2-5=4$ ……………………3 分

$\therefore 2a^2-c^2=9,\therefore a^2=6,\therefore c^2=3,\therefore b^2=3$，

所以椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ………………………………………………………4 分

（2）设 $A(x_0,y_0),P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=\lambda y+t$，

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=\lambda y+t\end{cases}\Rightarrow\left(\lambda^2+2\right)y^2+2t\lambda y+t^2-6=0,$$

$$\therefore y_1+y_2=-\frac{2t\lambda}{\lambda^2+2},y_1y_2=\frac{t^2-6}{\lambda^2+2},x_1=\lambda y_1+t,x_2=\lambda y_2+t,$$

$x_1+x_2=\dfrac{4t}{\lambda^2+2},x_1x_2=\dfrac{2t^2-6\lambda^2}{\lambda^2+2}$ ……………………………………………………7 分

设 $\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}+\dfrac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=\dfrac{\left(y_0-y_1\right)\cdot\left(x_0-x_2\right)+\left(y_0-y_2\right)\cdot\left(x_0-x_1\right)}{\left(x_0-x_1\right)\cdot\left(x_0-x_2\right)}$

$$=\frac{2x_0y_0-y_0\left(x_1+x_2\right)+2\lambda y_1y_2+\left(t-x_0\right)\left(y_1+y_2\right)}{x_0^2-\left(x_1+x_2\right)x_0+x_1x_2}$$

$$=\frac{2x_0y_0\lambda^2+\left(2tx_0-12\right)\lambda+4y_0\left(x_0-t\right)}{\left(x_0^2-6\right)\lambda^2+2\left(x_0-t\right)^2}=p$$

若 p 为常数，则 $2tx_0-12=0$ ……………………………………………………………… 10 分

即 $6=tx_0$，而此时 $\dfrac{2x_0y_0}{\left(x_0^2-6\right)}=\dfrac{4y_0\left(x_0-t\right)}{2\left(x_0-t\right)^2}=\dfrac{2y_0}{x_0-t}$，

又 $-\sqrt{6}<x_0<\sqrt{6},\therefore-\sqrt{6}<\dfrac{6}{t}<\sqrt{6}$，即 $t>\sqrt{6}$ 或 $t<-\sqrt{6}$，

综上所述，$t>\sqrt{6}$ 或 $t<-\sqrt{6}$，存在点 $A\left(\dfrac{6}{t},\pm\sqrt{3-\dfrac{18}{t^2}}\right)$，使得直线 AP 的斜率与直线 AQ

的斜率之和为定值 $\dfrac{2y_0}{x_0-t}$ ……………………………………………………………… 12 分

22.（12 分）

（1）$g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}+x,g'\left(x\right)=\dfrac{\left(1-\ln x\right)}{x^2}+1=\dfrac{1-\ln x+x^2}{x^2}$ ………………………………1 分

令 $h\left(x\right)=1-\ln x+x^2,h'\left(x\right)=-\dfrac{1}{x}+2x>0$，即 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以函数 $h\left(x\right)$ 在区间 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 单调递增，在区间 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递减………………3 分

又 $h_{\min}(x)=h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>0,\therefore h(x)>0,\therefore g'(x)>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增…………………………………………………………5 分

（2）不等式 $e^{ax}-e\dfrac{\ln x}{x}-ea>0$ 等价于 $xe^{ax-1}-\ln x-ax>0$

令 $g(x)=xe^{ax-1}-\ln x-ax>0$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}(1+ax)\left(xe^{ax-1}-1\right)$…………………………7 分

设 $h(x)=xe^{ax-1}-1,\therefore h'(x)=(ax+1)e^{ax-1}$，

当 $0<x<-\dfrac{1}{a},h'(x)>0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore h_{\max}(x)=h\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-\dfrac{1}{a}\left(e^{-2}+a\right)$，

$\because a<-e^{-2},\therefore h_{\max}=-\dfrac{1}{a}\left(e^{-2}+a\right)<0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 单调递减……………………10 分

$\therefore g_{\min}(x)=g\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-\dfrac{1}{a}e^{-2}-\ln\dfrac{-1}{e^2a}-1$，

令 $\dfrac{-1}{e^2a}=t$，则 $g_{\min}(t)=t-\ln t-1=m(t)\left(t\in(0,1)\right),m'(t)=1-\dfrac{1}{t}$，

$\therefore m(t)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore m_{\min}(x)=m(1)=0,m(t)>0$，

$\therefore g_{\min}(x)>0,\therefore g(x)>0$ ……………………………………………………………12 分

即 $a<-e^{-2}$ 时，不等式 $f(x)>0$ 恒成立.