

2023 届高三第二次调研测试

数学参考答案与讲评建议

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 M, N 是 U 的非空子集, $M \cap N = M$, 则

- A. $M \subseteq N$ B. $N \subseteq M$ C. $\complement_U M = N$ D. $\complement_U N = M$

【答案】A

2. 若 $iz = (1 - 2i)^2$, 则 $z =$

- A. $4 + 3i$ B. $4 - 3i$ C. $-4 + 3i$ D. $-4 - 3i$

【答案】C

3. 已知 $(x^3 + \frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中各项系数和为 243, 则展开式中常数项为

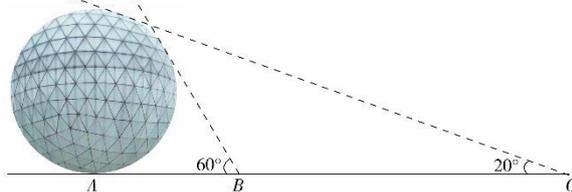
- A. 60 B. 80 C. 100 D. 120

【答案】B

4. 古代数学家刘徽编撰的《重差》是中国最早的一部测量学著作, 也为地图学提供了数学基础. 现根据刘徽的《重差》测量一个球体建筑物的高度, 已知点 A 是球体建筑物与水平地面的接触点(切点), 地面上 B, C 两点与点 A 在同一条直线上, 且在点 A 的同侧. 若在 B, C 处分别测得球体建筑物的最大仰角为 60° 和 20° , 且 $BC = 100$ m, 则该球体建筑物的高度约为 ($\cos 10^\circ \approx 0.985$)

- A. 49.25 m B. 50.76 m
C. 56.74 m D. 58.60 m

【答案】B



5. 在 $\square ABCD$ 中, $\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BC}$, $\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AE}$. 若 $\vec{AB} = m\vec{DF} + n\vec{AE}$, 则 $m + n =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】D

6. 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T . 若 $\frac{\pi}{2} < T < \pi$, 且 $f(x) \leq |f(\frac{\pi}{3})|$,

则 $\omega =$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{15}{4}$ D. $\frac{27}{4}$

【答案】C

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $y = f(x) + e^x$ 是偶函数, $y = f(x) - 3e^x$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 的最小值为

- A. e B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $2e$

【答案】B

8. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, 点 P 在双曲线上, $PF_1 \perp PF_2$, 圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{9}{4}(a^2 + b^2)$, 直线 PF_1 与圆 O 相交于 A, B 两点, 直线 PF_2 与圆 O 相交于 M, N 两点. 若四边形 $AMBN$ 的面积为 $9b^2$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

【答案】D

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知甲种杂交水稻近五年的产量 (单位: t/hm^2) 数据为: 9.8, 10.0, 10.0, 10.0, 10.2, 乙种杂交水稻近五年的产量 (单位: t/hm^2) 数据为: 9.6, 9.7, 10.0, 10.2, 10.5, 则

- A. 甲种的样本极差小于乙种的样本极差
B. 甲种的样本平均数等于乙种的样本平均数
C. 甲种的样本方差大于乙种的样本方差
D. 甲种的样本 60 百分位数小于乙种的样本 60 百分位数

【答案】ABD

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_n = \begin{cases} 2n-13, & 1 \leq n \leq 6, \\ (-3)^{n-7} - 1, & n > 6. \end{cases}$ 若 $S_k = -32$, 则 k 可能为

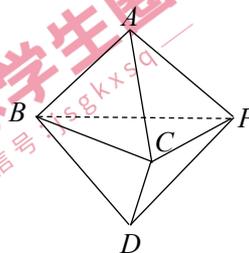
- A. 4 B. 8 C. 9 D. 12

【答案】AC

11. 如图，正三棱锥 $A-PBC$ 和正三棱锥 $D-PBC$ 的侧棱长均为 $\sqrt{2}$ ， $BC=2$ 。若将正三棱锥 $A-PBC$ 绕 BC 旋转，使得点 A, P 分别旋转至点 A', P' 处，且 A', B, C, D 四点共面，点 A', D 分别位于 BC 两侧，则

- A. $A'D \perp CP$
 B. $PP' \parallel$ 平面 $A'BDC$
 C. 多面体 $PP'A'BDC$ 的外接球的表面积为 6π
 D. 点 A, P 旋转运动的轨迹长相等

【答案】BC



12. 已知 $a > 0$ ， $e^a + \ln b = 1$ ，则

- A. $a + \ln b < 0$ B. $e^a + b > 2$ C. $\ln a + e^b < 0$ D. $a + b > 1$

【答案】ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知点 P 在抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上，过 P 作 C 的准线的垂线，垂足为 H ，点 F 为 C 的焦点。若 $\angle HPF = 60^\circ$ ，点 P 的横坐标为 1，则 $p =$ _____。

【答案】 $\frac{2}{3}$

14. 过点 $(-1, 0)$ 作曲线 $y = x^3 - x$ 的切线，写出一条切线的方程_____。

【答案】 $2x - y + 2 = 0$ ，答案不唯一， $x + 4y + 1 = 0$ 也正确

15. 已知一扇矩形窗户与地面垂直，高为 1.5 m，下边长为 1 m，且下边距地面 1 m。若某人观察到窗户在平行光线的照射下，留在地面上的影子恰好为矩形，其面积为 1.5 m^2 ，则窗户与地面影子之间光线所形成的几何体的体积为_____ m^3 。

【答案】 $\frac{21}{8}$

16. “完全数”是一类特殊的自然数，它的所有正因数的和等于它自身的两倍。寻找“完全数”用到函数 $\sigma(n): \forall n \in \mathbb{N}^+$ ， $\sigma(n)$ 为 n 的所有正因数之和，如 $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ ，则 $\sigma(20) =$ _____； $\sigma(6^n) =$ _____。

(第一空 2 分，第二空 3 分)

【答案】42； $\frac{1}{2}(2^{n+1} - 1)(3^{n+1} - 1)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题 10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\sin C = \sqrt{3} \sin A \sin B$ 。

(1) 若 $A = \frac{\pi}{3}$ ，求 $\cos B$ ；

(2) 若 $c = \sqrt{6}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

解：(1) (方法 1) 因为在 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $C = \pi - (A + B) = \frac{2\pi}{3} - B$ 。

因为 $\sin C = \sqrt{3} \sin A \sin B$ ，所以 $\sin(\frac{2\pi}{3} - B) = \frac{3}{2} \sin B$ ，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B = \frac{3}{2} \sin B$ ，即 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B$ (*)。…… 3 分

又 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ ，

所以 $(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B)^2 + \cos^2 B = 1$ ，即 $\cos^2 B = \frac{4}{7}$ ，

又因为 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $\sin B > 0$ ，由 (*) 知， $\cos B > 0$ ，

所以 $\cos B = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 。…… 6 分

(方法 2) 因为在 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{\pi}{3}$ ，

所以 $\sin C = \sqrt{3} \sin A \sin B = \frac{3}{2} \sin B$ ，

所以由正弦定理，得 $c = \frac{3}{2} b$ 。…… 2 分

由余弦定理，得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + (\frac{3}{2}b)^2 - 2b \cdot \frac{3}{2}b \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{7}{4}b^2$ ，

因为 $a > 0, b > 0$ ，

所以 $a = \frac{\sqrt{7}}{2} b$ 。…… 4 分

由余弦定理，得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(\frac{\sqrt{7}}{2}b)^2 + (\frac{3}{2}b)^2 - b^2}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{2}b \times \frac{3}{2}b} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 。…… 6 分

(2) 因为 $\sin C = \sqrt{3} \sin A \sin B$ ，由正弦定理，得 $c = \sqrt{3} a \sin B$ 。

又因为 $c = \sqrt{6}$ ，所以 $a \sin B = \sqrt{2}$ 。…… 8 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{3}. \quad \dots 10 \text{分}$$

18. (本题 12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 1$, $S_{n+1}^2 - S_n^2 = 8n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 S_n ;

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 的每相邻两项 a_k, a_{k+1} 之间依次插入 a_1, a_2, \dots, a_k , 得到数列 $\{b_n\}$:
 $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, 求 $\{b_n\}$ 的前 100 项和.

解: (1) 因为 $S_{n+1}^2 - S_n^2 = 8n$,

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n^2 &= (S_n^2 - S_{n-1}^2) + L + (S_2^2 - S_1^2) + S_1^2 \\ &= 8(n-1) + L + 8 \times 1 + 1 \end{aligned} \quad \dots 2 \text{分}$$

$$= 8[1+2+3+L+(n-1)] + 1$$

$$= 8 \times \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

$$= (2n-1)^2, \quad \dots 4 \text{分}$$

因为 $a_n > 0$, 所以 $S_n > 0$,

所以 $S_n = 2n-1$.

当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1 = 1$ 适合上式,

所以 $S_n = 2n-1$, $n \in \mathbf{N}^*$. \dots 6 分

(2) (方法 1) 因为 $S_n = 2n-1$, $n \in \mathbf{N}^*$,

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (2n-1) - (2n-3) = 2$.

所以 $a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 2, & n \geq 2. \end{cases}$ \dots 8 分

所以数列 $\{b_n\}$: $1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, \dots$,

设 $1+2+L+n = \frac{n(n+1)}{2} \leq 100$, 则 $n^2+n-200 \leq 0$,

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n \leq 13$. \dots 10 分

所以 $\{b_n\}$ 的前 100 项是由 14 个 1 与 86 个 2 组成.

所以 $T_{100} = 14 \times 1 + 86 \times 2 = 186$ 12分

(方法2) 设 $1+2+L+n = \frac{n(n+1)}{2} \leq 100$, 则 $n^2+n-200 \leq 0$,

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n \leq 13$ 8分

根据数列 $\{b_n\}$ 的定义, 知

$$\begin{aligned} T_{100} &= a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + L + (a_1 + a_2 + L + a_{13}) + (a_1 + a_2 + L + a_9) \\ &= S_1 + S_2 + S_3L + S_{13} + S_9 \end{aligned}$$
..... 10分

$$= (1+3+5L+25) + 17$$

$$= \frac{13 \times (1+25)}{2} + 17$$

$$= 186. \quad \text{..... 12分}$$

19. (本题 12 分)

如图, 在圆台 OO_1 中, A_1B_1, AB 分别为上、下底面直径, 且 $A_1B_1 \parallel AB$, $AB = 2A_1B_1$, CC_1 为异于 AA_1, BB_1 的一条母线.

(1) 若 M 为 AC 的中点, 证明: $C_1M \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ;

(2) 若 $OO_1 = 3$, $AB = 4$, $\angle ABC = 30^\circ$, 求二面角 $A-C_1C-O$ 的正弦值.

证明: (1) 如图, 连接 A_1C_1 .

因为在圆台 OO_1 中, 上、下底面直径分别为

A_1B_1, AB , 且 $A_1B_1 \parallel AB$,

所以 AA_1, BB_1, C_1C 为圆台母线且交于一点 P .

所以 A, A_1, C_1, C 四点共面. 2分

因为在圆台 OO_1 中, 平面 $ABC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$,

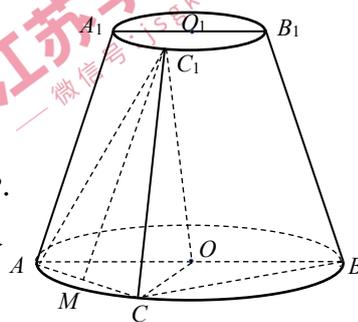
平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $ABC = AC$, 平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = A_1C_1$,

所以 $A_1C_1 \parallel AC$ 4分

又因为 $A_1B_1 \parallel AB, AB = 2A_1B_1$, 所以 $\frac{PA_1}{PA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{PC_1}{PC} = \frac{PA_1}{PA} = \frac{1}{2}$, 即 C_1 为 PC 中点.

在 $\triangle PAC$ 中, 又 M 为 AC 的中点, 所以 $C_1M \parallel AA_1$.



因为 $AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $C_1M \not\subset$ 平面 ABB_1A_1 ,

所以 $C_1M \parallel$ 平面 ABB_1A_1 .

…… 6 分

(2) 以 O 为坐标原点, OB, OO_1 分别为 y, z 轴, 过 O 且垂直于平面 ABB_1A_1 的直线为 x 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

因为 $\angle ABC = 30^\circ$, 所以 $\angle AOC = 60^\circ$.

则 $A(0, -2, 0), C(\sqrt{3}, -1, 0), O_1(0, 0, 3)$.

因为 $\vec{OC} = (\sqrt{3}, -1, 0)$, 所以 $\vec{O_1C_1} = \frac{1}{2}\vec{OC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.

所以 $C_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 3)$, 所以 $\vec{C_1C} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -3)$.

设平面 OCC_1 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \mathbf{n}_1 \perp \vec{OC}, \\ \mathbf{n}_1 \perp \vec{C_1C}, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} \sqrt{3}x_1 - y_1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1 - 3z_1 = 0, \end{cases}$$

所以平面 OCC_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, \sqrt{3}, 0)$.

又 $\vec{AC} = (\sqrt{3}, 1, 0)$,

设平面 ACC_1 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \perp \vec{AC}, \\ \mathbf{n}_2 \perp \vec{C_1C}, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} \sqrt{3}x_2 + y_2 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 - 3z_2 = 0, \end{cases}$$

所以平面 ACC_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (1, -\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

…… 10 分

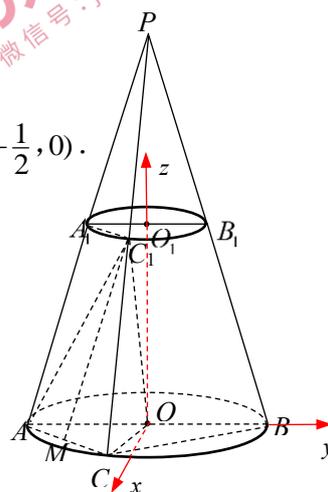
$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1 \times 1 + \sqrt{3}(-\sqrt{3}) + 0 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+3} \times \sqrt{1+3+\frac{1}{3}}} = -\frac{\sqrt{39}}{13}.$$

设二面角 $M-C_1C-O$ 的大小为 θ ,

$$\text{所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle} = \frac{\sqrt{130}}{13}.$$

所以二面角 $M-C_1C-O$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{130}}{13}$.

…… 12 分



20. (本题 12 分)

我国风云系列卫星可以监测气象和国土资源情况. 某地区水文研究人员为了了解汛期人工测雨量 x (单位: dm) 与遥测雨量 y (单位: dm) 的关系, 统计得到该地区 10 组雨量数据如下:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人工测雨量 x_i	5.38	7.99	6.37	6.71	7.53	5.53	4.18	4.04	6.02	4.23
遥测雨量 y_i	5.43	8.07	6.57	6.14	7.95	5.56	4.27	4.15	6.04	4.49
$ x_i - y_i $	0.05	0.08	0.2	0.57	0.42	0.03	0.09	0.11	0.02	0.26

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 353.6$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 361.7$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 357.3$, $\bar{x}^2 \approx 33.62$, $\bar{y}^2 \approx 34.42$, $\bar{x} \bar{y} \approx 34.02$.

(1) 求该地区汛期遥测雨量 y 与人工测雨量 x 的样本相关系数 (精确到 0.01), 并判断它们是否具有线性相关关系;

(2) 规定: 数组 (x_i, y_i) 满足 $|x_i - y_i| < 0.1$ 为 “I 类误差”; 满足 $0.1 \leq |x_i - y_i| < 0.3$ 为 “II 类误差”; 满足 $|x_i - y_i| \geq 0.3$ 为 “III 类误差”. 为进一步研究, 该地区水文研究人员从 “I 类误差”、“II 类误差” 中随机抽取 3 组数据与 “III 类误差” 数据进行对比, 记抽到 “I 类误差” 的数据的组数为 X , 求 X 的概率分布与数学期望.

附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, $\sqrt{304.5} \approx 17.4$.

解: (1) 因为 $r = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \bar{x}^2) \times (\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10 \bar{y}^2)}}$, …… 2 分

代入已知数据,

得 $r = \frac{357.3 - 10 \times 34.02}{\sqrt{(353.6 - 10 \times 33.62) \times (361.7 - 10 \times 34.42)}} = \frac{17.1}{\sqrt{304.5}} \approx 0.98$.

所以汛期遥测雨量 y 与人工测雨量 x 有很强的线性相关关系. …… 4 分

(2) 依题意, “I 类误差” 有 5 组, “II 类误差” 有 3 组, “III 类误差” 有 2 组.

若从“Ⅰ类误差”和“Ⅱ类误差”数据中抽取3组，抽到“Ⅰ类误差”的组数 X 的所有可能取值为0, 1, 2, 3. …… 6分

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56},$$

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56},$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28},$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}. \quad \dots\dots 10分$$

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

所以 X 的数学期望 $E(X) = 1 \times \frac{15}{56} + 2 \times \frac{15}{28} + 3 \times \frac{5}{28} = \frac{15}{8}$. …… 12分

另解：因为 $X \sim H(3, 5, 8)$ ，所以 $E(X) = \frac{3 \times 5}{8} = \frac{15}{8}$. …… 12分

21. (本题 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，焦距为 2，过 E 的左焦点 F 的直线 l 与 E 相交于 A, B 两点，与直线 $x = -2$ 相交于点 M .

(1) 若 $M(-2, -1)$ ，求证： $|MA| \cdot |BF| = |MB| \cdot |AF|$;

(2) 过点 F 作直线 l 的垂线 m 与 E 相交于 C, D 两点，与直线 $x = -2$ 相交于点 N .

求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} + \frac{1}{|NC|} + \frac{1}{|ND|}$ 的最大值.

解：(1) 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,

因为焦距为 2，所以 $2c = 2$ ，解得 $c = 1$.

又因为离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $a = \sqrt{2}$ ，所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 2 - 1 = 1$,

所以椭圆 $E: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 2分

因为直线 l 经过 $M(-2, -1), F(-1, 0)$, 所以直线 l 方程为 $y = x + 1$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} y = x + 1, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $3x^2 + 4x = 0$.

(方法1) 由 $3x^2 + 4x = 0$, 得 $x_1 = -\frac{4}{3}, x_2 = 0$ 4分

$$\begin{aligned} \text{所以 } |MA| \cdot |BF| &= \sqrt{(x_1 + 2)^2 + (y_1 + 1)^2} \cdot \sqrt{(x_2 + 1)^2 + (y_2 - 0)^2} \\ &= 2|x_1 + 2| |x_2 + 1| = 2 \times \left| -\frac{4}{3} + 2 \right| \times |0 + 1| = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{同理, 得 } |MB| \cdot |AF| = 2|x_2 + 2| \cdot |x_1 + 1| = 2 \times |0 + 2| \times \left| -\frac{4}{3} + 1 \right| = \frac{4}{3}.$$

所以 $|MA| \cdot |BF| = |MB| \cdot |AF|$ 6分

(方法2) 由 $3x^2 + 4x = 0$, 得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}, \\ x_1 x_2 = 0. \end{cases}$ 4分

$$\text{因为 } |MA| \cdot |BF| = \sqrt{2}|x_1 + 2| \cdot \sqrt{2}|x_2 + 1| = 2|x_1 + 2x_2 + 2| = 2 \left| -\frac{4}{3} + x_2 + 2 \right| = 2 \left| x_2 + \frac{2}{3} \right|,$$

$$\text{同理, 得 } |MB| \cdot |AF| = 2|x_2 + 2x_1 + 2| = 2 \left| x_2 + 2 \left(-\frac{4}{3} - x_2 \right) + 2 \right| = 2 \left| x_2 + \frac{2}{3} \right|,$$

所以 $|MA| \cdot |BF| = |MB| \cdot |AF|$ 6分

(2) 由题设知, 直线 l 的斜率存在, 且不为 0.

设直线 l 方程为 $y = k(x + 1)$, 直线 m 方程为 $y = -\frac{1}{k}(x + 1)$, 其中 $k \neq 0$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = k(x + 1), \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = 16k^4 - 4(2k^2 + 1)(2k^2 - 2) = 8k^2 + 8 > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{4k^2}{1 + 2k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{2k^2 - 2}{1 + 2k^2}. \end{cases}$$

因为 $M(-2, -k)$, 所以 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}|x_1+2|} + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}|x_2+2|}$.

因为 $x_1 > -2, x_2 > -2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left(\frac{1}{x_1+2} + \frac{1}{x_2+2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}.$$

…… 8分

$$\text{所以 } \frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{-\frac{4k^2}{1+2k^2} + 4}{\frac{2k^2-2}{1+2k^2} + \frac{-8k^2}{1+2k^2} + 4} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{4k^2+4}{2k^2+2} = \frac{2}{\sqrt{1+k^2}}.$$

…… 10分

$$\text{同理, 得 } \frac{1}{|NC|} + \frac{1}{|ND|} = \frac{2}{\sqrt{1+(-\frac{1}{k})^2}} = \frac{2|k|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

$$\text{所以 } \frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} + \frac{1}{|NC|} + \frac{1}{|ND|} = \frac{2(1+|k|)}{\sqrt{1+k^2}} = 2\sqrt{\frac{k^2+1+2|k|}{k^2+1}}$$

$$\leq 2\sqrt{\frac{2(k^2+1)}{k^2+1}} = 2\sqrt{2} \text{ (当且仅当 } |k|=1, \text{ 即 } k=\pm 1 \text{ 时, 取“=”)}$$

所以 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} + \frac{1}{|NC|} + \frac{1}{|ND|}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$. …… 12分

22. (本题 12分)

已知函数 $f(x) = ax - \ln x - \frac{a}{x}$.

(1) 若 $x > 1, f(x) > 0$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的两个极值点, 证明: $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\sqrt{1-4a^2}}{a}$.

解: 依题意, $f'(x) = a - \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} = \frac{ax^2 - x + a}{x^2} (x > 0)$. …… 1分

(1) ① 当 $a \leq 0$ 时, $x > 1, f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x) < f(1) = 0$, 所以 $a \leq 0$ 不符合题设. …… 2分

② 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $ax^2 - x + a = 0$,

解得 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \in (0, 1)$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \in (1, +\infty)$,

所以当 $x \in (1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, x_2)$ 上单调递减,

所以 $f(x) < f(1) = 0$, 所以 $0 < a < \frac{1}{2}$ 不符合题设. 4分

③ 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 判别式 $\Delta = 1 - 4a^2 \leq 0$, 所以 $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) > f(1) = 0$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 6分

(2) 由 (1) 知, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时,

$f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 x_1 是 $f(x)$ 的极大值点, x_2 是 $f(x)$ 的极小值点.

由 (1) 知, $x_1 x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = \frac{1}{a}$, $x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{1 - 4a^2}}{a}$.

所以要证 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\sqrt{1 - 4a^2}}{a}$, 只要证 $f(x_1) - f(x_2) < x_2 - x_1$ 8分

$$\begin{aligned} \text{因为 } x_2 - x_1 - f(x_1) + f(x_2) &= (a+1)(x_2 - x_1) - \ln \frac{x_2}{x_1} + a \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \\ &= 2a(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1) - \ln \frac{x_2}{x_1} = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_1 x_2}} - \ln \frac{x_2}{x_1} \\ &= \frac{2\left(\frac{x_2}{x_1} - 1\right)}{\frac{x_2}{x_1} + 1} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \ln \frac{x_2}{x_1}, \end{aligned}$$

设 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$, $g(t) = \frac{2(t-1)}{t+1} + \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \ln t$ 10分

所以 $g'(t) = \frac{4}{(t+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2t\sqrt{t}} - \frac{1}{t} = \frac{4}{(t+1)^2} + \frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}} > 0$,

所以 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(t) > g(1) = 0$.

所以 $x_2 - x_1 - f(x_1) + f(x_2) > 0$, 即得 $f(x_1) - f(x_2) < x_2 - x_1$ 成立.

所以原不等式成立. 12分