高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　由题意得 $A=[-1,3)$，所以 $A\cap B=\{-1,0,2\}$. 故选 D.

2. C　因为 $z=\frac{5+12i}{8+6i}$，所以 $|z|=\frac{|5+12i|}{|8+6i|}=\frac{\sqrt{5^2+12^2}}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{13}{10}$. 故选 C.

3. B　由"直线 l 与双曲线 C 相切"可以推出"直线 l 与双曲线 C 仅有一个公共点"；反之则不然，于是"直线 l 与双曲线 C 有且仅有一个公共点"是"直线 l 与双曲线 C 相切"的必要不充分条件. 故选 B.

4. D　由题意，得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=4$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，从而 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$. 故选 D.

5. B　由题意知 $\tan\theta_1=2,\tan\theta_2=3$，所以 $\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{2-3}{1+2\times3}=-\frac{1}{7}$. 故选 B.

6. A　l_2 的方程可化为 $x+\frac{m}{2}y+\sqrt{5}-1=0$，易知 $m=-4$ 时，$l_1/\!/l_2$，所以 l_1 与 l_2 间的距离 $d=\frac{|(\sqrt{5}-1)-(-1)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$. 故选 A.

7. C　由题意知，l 的倾斜角为 $30°$，因为 $|OA|=|OB|$，所以 l_1 的倾斜角为 $60°$，斜率为 $\sqrt{3}$，即 $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

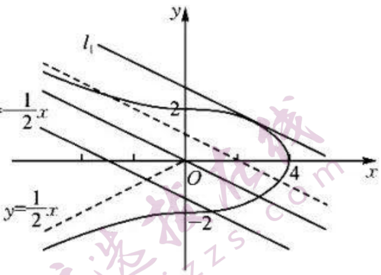
8. A　由图象知 $\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，$\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{2\pi}{3}$，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 为 $f(x)$ 的最小值，故 $\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=-1$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$；由 $f(0)=1$，得 $A\sin\frac{\pi}{6}=1$. 故 $A=2$. 所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 故选 A.

9. D　法一：由题意知，$a=2,b=1$，故半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，故 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，线段 AB 的方程为 $x-2y+2=0\ (0\leqslant y\leqslant1)$. 设点 $P(2m-2,m)\ (0\leqslant m\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{PF_1}=(-\sqrt{3}+2-2m,-m)$，$\overrightarrow{PF_2}=(\sqrt{3}+2-2m,-m)$，所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=5m^2-8m+1=5\left(m-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{11}{5}$，所以当 $m=\frac{4}{5}$ 时，$(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\min}=-\frac{11}{5}$；当 $m=0$ 时，$(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\max}=1$. 故 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围为 $\left[-\frac{11}{5},1\right]$. 故选 D.

法二：由题意知 $a=2,b=1$，故半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$. 作 $OP_0\perp AB$ 于点 P_0，则 P_0 在线段 AB 上，直线 AB 的方程为 $x-2y+2=0$，由点到直线的距离公式，得 $|OP_0|=\frac{|0-2\times0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. 而 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OF_2}^2=\overrightarrow{PO}^2-3$，因此 $(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\min}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-3=-\frac{11}{5}$. 又因为 $|OP|\leqslant|OA|=2$，所以 $(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\max}=2^2-3=1$. 因此 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围为 $\left[-\frac{11}{5},1\right]$. 故选 D.

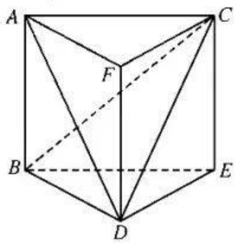
10. B　当 $x\geqslant0$ 时，C 的方程可化为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，为椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的右半部分，当 $x<0$ 时，C 的方程可化为 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$，

为双曲线 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$ 的左半部分,其渐近线为 $y=\pm\frac{1}{2}x$. 如图所示,当直线 l 介于直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 和 l_1(l_1 与 l 平行且与 C 相切,切点在第一象限)之间时,直线 l 与曲线 C 有两个公共点. 设 l_1 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+m_0$,联立



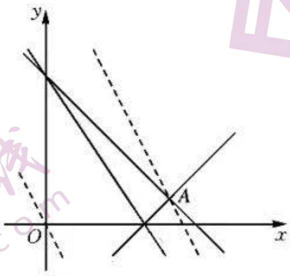
$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1, \\ y=-\frac{1}{2}x+m_0,\end{cases}$ 消去 x 并整理得 $2y^2-2m_0y+m_0^2-4=0$,由 $\Delta=4m_0^2-8(m_0^2-4)=0$,解得 $m_0=2\sqrt{2}$ 或 $m_0=-2\sqrt{2}$(舍),故 m 的取值范围为 $(0,2\sqrt{2})$. 故选 B.

11. C 将四面体 $ABCD$ 补成如图所示的三棱柱 $ACF-BED$. 因为 $AB\perp AC$,异面直线 AC 与 BD 所成的角为 $30°$,$BE/\!/AC$,所以 $\angle EBD=30°$,$AB\perp BE$;又 $AB\perp BD$,$BE\cap BD=D$,BE、$BD\subset$ 平面 BDE,所以 $AB\perp$ 平面 BDE. $\triangle BDE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}BD\cdot BE\sin 30°=\frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{1}{2}=\frac{15}{4}$,$V_{三棱锥D\text{-}ACF}=V_{三棱锥C\text{-}BED}=\frac{1}{3}S\cdot AB$,所以 $V_{四面体ABCD}=V_{三棱柱ACF\text{-}BED}-V_{三棱锥D\text{-}ACF}-V_{三棱锥C\text{-}BED}=S\cdot AB-\frac{2}{3}S\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{15}{4}\times4=5$. 故选 C.



12. A 因为对任意正数 x,y,当 $x<y$ 时,$yf(x)>xf(y)$,即 $\frac{f(x)}{x}>\frac{f(y)}{y}$ 恒成立;又 $\forall x>0$,$f(x)<0$,所以 $0<-\frac{f(x)}{x}<-\frac{f(y)}{y}$,$0<x^2<y^2$,所以 $-xf(x)<-yf(y)$,即 $xf(x)>yf(y)$. 令 $g(x)=xf(x)$,则对 $\forall x,y\in(0,+\infty)$,当 $x<y$ 时,恒有 $g(x)>g(y)$ 成立,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;由 $\sin 0.1<0.1<\tan 0.1$,得 $g(\sin 0.1)>g(0.1)>g(\tan 0.1)$,即 $a>b>c$. 故选 A.

13. $\frac{11}{2}$ 画出可行域(如图阴影部分所示),当直线 $2x+y-z=0$ 过点 A 时,z 取得最大值,易求得 $A\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$,所以 $z_{\max}=2\times\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$.

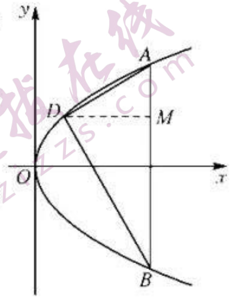


14. $x-2=0$ 或 $4x+3y-11=0$ 若 l 的斜率不存在,则 l 的方程为 $x=2$,是圆 C 的切线;若 l 的斜率存在,设 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$,即 $kx-y-1-2k=0$,则 $\frac{|1-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=3$,解得 $k=-\frac{4}{3}$,此时 l 的方程为 $4x+3y-11=0$,故直线 l 的方程为 $x-2=0$,或 $4x+3y-11=0$.

15. $4x-2y+4-\pi=0$ 由题意,得 $f'(x)=4\cos^2x-4\sin^2x+\frac{1}{\cos^2x}=4\cos 2x+\frac{1}{\cos^2x}$,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\tan\frac{\pi}{4}-1$

$=2, f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2$. 故所求切线方程为 $y-2=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，即 $4x-2y+4-\pi=0$.

16. 2　法一：设直线 AD 为 $x=my+n(m\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则 $B(x_1,-y_1)$. 由



$\begin{cases}y^2=2px,\\x=my+n,\end{cases}$ 得 $y^2-2pmy-2pn=0$. 所以 $y_1+y_2=2pm$. 因为 $AD\perp BD$，故 $k_{AD}\cdot k_{BD}=-1$，即

$\frac{1}{m}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}=-1$，所以 $\frac{1}{m}\cdot\frac{2pm}{x_2-x_1}=-1$，所以 $\frac{x_2-x_1}{p}=-2$，作 $DM\perp AB$ 垂足为 M，则点 D

到直线 $x=t$ 的距离为 $|DM|=|x_1-x_2|$，所以 $\frac{|DM|}{p}=2$.

法二：由题意可设 $A(t,y_1)$，$B(t,-y_1)$，$D(x_2,y_2)$，$x_2\neq t$，则 $y_1^2=2pt$，$y_2^2=2px_2$. 因为 $AD\perp BD$，所以 $\frac{y_1-y_2}{t-x_2}\cdot$

$\frac{-y_1-y_2}{t-x_2}=-1$，即 $(t-x_2)^2=y_1^2-y_2^2=2pt-2px_2=2p(t-x_2)$，因为 $t-x_2\neq0$，所以 $t-x_2=2p$，则点 D 到直线 $x=t$ 的距离为 $2p$. 故所求的比值为 2.

17. 解：(1) 由 $a\sin A-c\sin C=(b-c)\sin B$，及正弦定理，得 $a^2-c^2=b^2-bc$，

即 $b^2+c^2-a^2=bc$，……………………………………………………………… 2 分

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………… 3 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………… 4 分

(2) 因为 $a=3$，$A=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理得 $b^2+c^2-bc=9$，……………………………… 5 分

又因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，……………………………………… 7 分

所以 $2bc-bc\leqslant 9$，即 $bc\leqslant 9$，当且仅当 $b=c=3$ 时等号成立，……………………… 8 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times9\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，当且仅当 $b=c=3$ 时等号成立.

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. ……………………………………………… 10 分

18. (1) 证明：因为 $AB=PB=2$，$PA=2\sqrt{2}$，所以 $PA^2=PB^2+AB^2$，

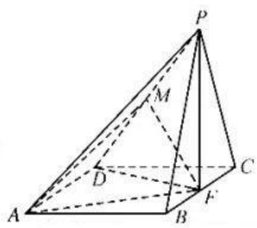
所以 $AB\perp PB$. ……………………………………………………………………… 1 分

又 $AB\perp BC$，BC，$PB\subset$ 平面 PBC，$BC\cap PB=B$，

所以 $AB\perp$ 平面 PBC. ……………………………………………………………… 3 分

而 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………… 4 分

(2) 解：连接 DF，PF，因为 $PB=PC$，F 为 BC 的中点，所以 $PF\perp BC$，且 $PF=\sqrt{3}$，



因为平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PBC\cap$ 平面 $ABCD=BC$，$PF\subset$ 平面 PBC，

所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$，所以 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{3}$. …………………………… 5 分

因为 $DF\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PF\perp DF$.

因为 M 为 PD 的中点,所以 M 到平面 $ABCD$ 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$, …………………………………………………… 6 分

易求得 $DF=\sqrt{5}$,$AF=\sqrt{5}$,$PD=2\sqrt{2}$,$\cos\angle PDA=\frac{\sqrt{2}}{4}$,$DM=\frac{1}{2}PD=\sqrt{2}$,

所以 $FM=\frac{1}{2}PD=\sqrt{2}$,$AM=\sqrt{4+2-2\times2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}}=2$, …………………………………………………… 7 分

所以 $\cos\angle MFA=\frac{FM^2+AF^2-AM^2}{2FM\cdot AF}=\frac{2+5-4}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{2\sqrt{10}}$,而 $0<\angle MFA<\pi$,

所以 $\sin\angle MFA=\sqrt{1-\left(\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{\sqrt{31}}{2\sqrt{10}}$,

所以$\triangle AFM$ 的面积 $S_{\triangle AFM}=\frac{1}{2}FM\cdot AF\sin\angle AFM=\frac{\sqrt{31}}{4}$. …………………………………………………… 9 分

设点 D 到平面 AFM 的距离为 h,由 $V_{三棱锥D-AFM}=V_{三棱锥M-ADF}$,得$\frac{1}{3}S_{\triangle AFM}h=\frac{1}{3}S_{\triangle ADF}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$, …………………… 10 分

即$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{31}}{4}h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $h=\frac{4\sqrt{93}}{31}$,因为 M 为 PD 的中点,所以点 P 到平面 AFM 的距离为$\frac{4\sqrt{93}}{31}$.

…… 12 分

19.解:(1)法一:当 $a=0$ 时,显然 $l_1\perp l_2$,且 l_1 与 l_2 的交点为$(-2,0)$; …………………………………………… 1 分

当 $a\neq0$ 时,l_1 与 l_2 的斜率分别为 $k_{l_1}=\frac{1}{a}$,$k_{l_2}=-a$, …………………………………………………… 2 分

$k_{l_1}\cdot k_{l_2}=-1$,所以 $l_1\perp l_2$,故对任意实数 a,$l_1\perp l_2$. …………………………………………………… 3 分

直线 l_1 过定点 $A(-2,0)$,l_2 过定点 $B(2,0)$, …………………………………………………… 4 分

设 $P(x,y)$,则 $PA\perp PB$,所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$,

所以$(x+2)(x-2)+y^2=0$,即 $x^2+y^2=4$.

又点$(2,0)$不是 l_1 与 l_2 的交点,

故曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=4(x\neq2)$. …………………………………………………… 6 分

法二:(消参法)当 $y\neq0$ 时,由 $x-ay+2=0$,得 $a=\frac{x+2}{y}$,代入 $ax+y-2a=0$,得$\frac{x(x+2)}{y}+y-\frac{2(x+2)}{y}=0$,

化简整理,得 $x^2+y^2=4(y\neq0)$,当 $y=0$ 时,$x=2$ 或 $x=-2$,易验证点$(-2,0)$符合条件,$(2,0)$不符合条件,故曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=4(x\neq2)$. …………………………………………………… 6 分

(2)圆 E 与曲线 C 的方程两边作差,得 $mx+ny-2=0(x\neq2)$,即为直线 MN 的方程. …………………… 7 分

因为$|MN|=2\sqrt{3}$,所以点 O 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{m^2+n^2}}=1$,

即 $m^2+n^2=4$. ① …………………………………………………… 9 分

因为圆 E 的圆心(m,n)在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上,所以 $n=\sqrt{3}m$. ② …………………………………………… 10 分

①②联立,并解得$\begin{cases}m=1,\\n=\sqrt{3},\end{cases}$或$\begin{cases}m=-1,\\n=-\sqrt{3},\end{cases}$

当$\begin{cases}m=1,\\n=\sqrt{3}\end{cases}$时,直线 MN 的方程为 $x+\sqrt{3}y-2=0$,过$(2,0)$点,不合题意;

当$\begin{cases}m=-1,\\ n=-\sqrt{3}\end{cases}$时，直线 MN 的方程为 $x-\sqrt{3}y+2=0$，易验证符合题意.

故 m,n 的值为 $-1,-\sqrt{3}$. ………………………… 12 分

20. (1)解：当 $n=2$ 时，$a_1=\frac{a_2-1}{2}$，所以 $a_2=3$；………………………… 1 分

当 $n\geqslant 3$ 时，$a_1+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{2n-5}=\frac{a_{n-1}-1}{2}$，

与 $a_1+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2n-3}=\frac{a_n-1}{2}$ 两边分别作差，得 $\frac{a_{n-1}}{2n-3}=\frac{a_n-1}{2}-\frac{a_{n-1}-1}{2}$，

化简，得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2n-1}{2n-3}(n\geqslant 3)$，………………………… 3 分

所以当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_3}{a_2}\times a_2=\frac{2n-1}{2n-3}\times\frac{2n-3}{2n-5}\times\cdots\times\frac{5}{3}\times 3=2n-1$，………………………… 5 分

显然 $n=1,2$ 时上式仍成立，故对任意正整数 n，$a_n=2n-1$. ………………………… 6 分

(2)证明：由(1)知 $a_2=3$，所以 $b_1=1,b_2=2$，………………………… 7 分

因为 $\ln b_n+\ln b_{n+2}=2\ln b_{n+1}$，所以 $b_nb_{n+2}=b_{n+1}^2$，

所以 $\{b_n\}$ 为等比数列，且公比 $q=\frac{b_2}{b_1}=2$，所以 $b_n=2^{n-1}$，………………………… 8 分

所以 $T_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，………………………… 9 分

所以 $T_n\cdot T_{n+2}=(2^n-1)(2^{n+2}-1)=2^{2n+2}-(2^n+2^{n+2})+1$.

因为 $2^n+2^{n+2}>2\sqrt{2^n\times 2^{n+2}}=2\times 2^{n+1}$，………………………… 11 分

所以 $T_n\cdot T_{n+2}<2^{2n+2}-2\times 2^{n+1}+1=(2^{n+1}-1)^2=T_{n+1}^2$，即 $T_n\cdot T_{n+2}<T_{n+1}^2$. ………………………… 12 分

21. 解：(1)$a=1$ 时，$f(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}-\ln x$，其定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(e^x-1)}{x^2}(x>0)$. ………………………… 1 分

因为 $x>0$，所以 $e^x-1>0$，………………………… 2 分

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，………………………… 3 分

所以 $f(x)$ 的减区间为 $(0,1)$，增区间为 $(1,+\infty)$. ………………………… 4 分

(2)$f(x)\leqslant 1-x-\frac{1}{x}$ 等价于 $a\leqslant\frac{x\ln x-x^2+x}{e^x}$，………………………… 5 分

令 $g(x)=\frac{x\ln x-x^2+x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)(x-\ln x-2)}{e^x}$，………………………… 6 分

令 $\varphi(x)=x-\ln x-2(x>1)$，$\varphi'(x)=\frac{x-1}{x}>0(x>1)$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………………………… 7 分

因为 $\varphi(e)=e-3<0$，$\varphi(e^2)=e^2-4>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 (e,e^2) 内存在唯一 x_0，使得 $\varphi(x_0)=0$，即 $\ln x_0=x_0-2$，………………………… 8 分

所以当 $x\in(1,x_0)$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $g'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，………………………… 9 分

故 $g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0(\ln x_0-x_0+1)}{e^{x_0}}$. ………………………………………………… 10 分

因为 $\ln x_0=x_0-2$，所以 $x_0=e^{x_0-2}$，$\ln x_0-x_0=-2$，

所以 $g(x_0)=\dfrac{-x_0}{e^{x_0}}=-\dfrac{e^{x_0-2}}{e^{x_0}}=-\dfrac{1}{e^2}$， ………………………………………………… 11 分

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=-\dfrac{1}{e^2}$，

所以 $a\leqslant-\dfrac{1}{e^2}$. 即实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{e^2}\right]$. ………………………………………………… 12 分

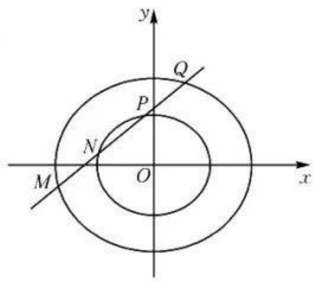
22. (1)解：由题意知半焦距 $c=|OF_1|=1$，因为 $\angle AF_1F_2=60^\circ$，

所以 $a=|AF_1|=\dfrac{|OF_1|}{\cos 60^\circ}=2$， ………………………………………………… 2 分

所以 $b^2=a^2-1=3$，

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………… 4 分

(2)证明：椭圆 C 的 3 倍相似椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=3$，即 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$. ……… 5 分



设 $N(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，

联立 l 与 C 的方程，得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

则 $\Delta_1=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$，即 $4k^2+3>m^2$，

且 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$， ………………………………………………… 6 分

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\dfrac{8km}{3+4k^2}\right)^2-\dfrac{4(4m^2-12)}{3+4k^2}}=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2+3-m^2}}{3+4k^2}$. ……………… 7 分

联立 l 与 E 的方程，得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-36=0$，

则 $x_3+x_4=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$x_3x_4=\dfrac{4m^2-36}{3+4k^2}$，

所以 $|x_3-x_4|=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{12k^2+9-m^2}}{3+4k^2}$， ………………………………………………… 8 分

所以 $x_1+x_2=x_3+x_4$，所以线段 NP，MQ 的中点相同，

所以 $|MN|=|PQ|$. ………………………………………………… 9 分

又 $|MN|=|NP|$，所以 $|MQ|=3|NP|$， ………………………………………………… 10 分

所以 $|x_3-x_4|=3|x_1-x_2|$，即 $\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{12k^2+9-m^2}}{3+4k^2}=3\times\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2+3-m^2}}{3+4k^2}$，

化简，得 $4m^2-12k^2=9$，满足 $4k^2+3>m^2$，

所以 $\dfrac{4m^2}{9}-\dfrac{4k^2}{3}=1$，故点 $T(k,m)$ 在定双曲线 $\dfrac{4y^2}{9}-\dfrac{4x^2}{3}=1$ 上. ………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。