天一大联考

2020—2021 学年高中毕业班阶段性测试(六)

理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 $z=\dfrac{2\,021-\mathrm{i}}{1+2\,021\mathrm{i}}$,则 $\bar{z}=$

A. i　　B. $-2\,021$　　C. 2 021i　　D. -1

2. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x|<1\}$,$B=\{x\,|\log_2x\leqslant 2\}$,则 $A\cup B=$

A. $(0,2)$　　B. $(-1,4)$　　C. $(-1,4]$　　D. $(0,4]$

3. 某超市计划按月订购一种冷饮,根据往年销售经验,每天需求量与当天最高气温(单位:℃)有关. 如果最高气温不低于 25℃,需求量为 600 瓶;如果最高气温位于区间 [20℃,25℃)内,需求量为 300 瓶;如果最高气温低于 20℃,需求量为 100 瓶. 为了确定 6 月份的订购计划,统计了前三年 6 月份各天的最高气温数据,得到下面的频数分布表:

最高气温	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)
天数	3	6	25	38	18

将最高气温位于各区间的频率视为最高气温位于该区间的概率,若 6 月份这种冷饮一天的需求量不超过 x 瓶的概率估计值为 0.1,则 $x=$

A. 100　　B. 300　　C. 400　　D. 600

4. 黄金分割比是指将整体一分为二,较大部分与整体的比值等于较小部分与较大部分的比值,该比值为 $m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$,这是公认的最能引起美感的比例. 黄金分割比的值还可以近似地表示为 $2\sin 18°$,则 $\dfrac{\sqrt{3}\sin 12°+m}{\cos 12°}$ 的近似值等于

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\sqrt{3}$

5. $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 的展开式中 x 的系数为

A. -24　　B. 12　　C. 16　　D. 24

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上的点 M 到焦点 F 的距离与到 y 轴的距离之差为 2，则 $p=$ ________.

14. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 a_3,a_5,a_{10} 成等比数列，则 $\dfrac{S_7}{a_7}=$ ________.

15. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 2，其内切球的半径为 r，则该四棱锥的侧棱与底面所成角的正切值为________（用含 r 的代数式表示）.

16. 已知点 F 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，过 F 作一条渐近线的垂线，垂足为 A，若 $\triangle OAF$（点 O 为坐标原点）的面积为 2，双曲线的离心率 $e\in[\sqrt{17},\sqrt{65}]$，则 a 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $c\sin 2B+2b\sin B\cos C=2\sqrt{3}b\cos A$.

（Ⅰ）求角 A；

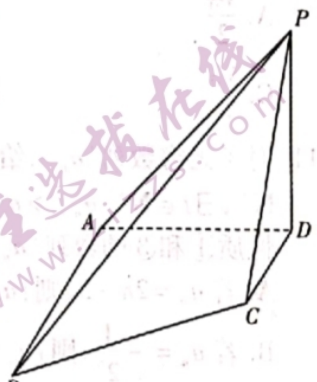
（Ⅱ）若 $a=4$，求 BC 边上的中线 AD 长度的取值范围.

18.（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle DAB=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=2DC=2$，$PD=\sqrt{3}$，$PA=\sqrt{6}$，$CD\perp PD$.

（Ⅰ）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求二面角 $A-PB-C$ 的大小.



19.（12 分）

2021 年，福建、河北、辽宁、江苏、湖北、湖南、广东、重庆 8 省市将迎来“3＋1＋2”新高考模式.“3”指的是：语文、数学、英语，统一高考；“1”指的是：物理和历史，考生从中选一科；“2”指的是：化学、生物、地理和政治，考生从四科中选两科. 为了迎接新高考，某中学调查了高一年级 1 500 名学生的选科倾向，随机抽取了 100 人，统计选考科目人数如下表：

	选考物理	选考历史	总计
男生	40		50
女生			
总计		30	

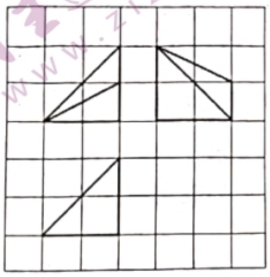
6. 已知 $e^a=\pi$，$2^b=3$，$c=\sin 2\,021°$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

7. 已知圆 O 的半径为 1，A，B 是圆 O 上的两个动点，$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，则 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$

8. 如图，网格纸上小正方形的边长均为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积为



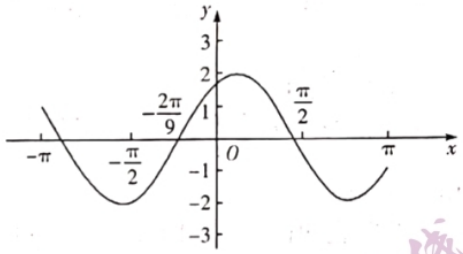
A. 6　　B. 4

C. 3　　D. 2

9. 元宵节是中国的传统节日之一，元宵节主要有赏花灯、吃汤圆、猜灯谜、放烟花等一系列传统民俗活动，北方"滚"元宵，南方"包"汤圆. 某超市在元宵节期间出售 2 个品牌的黑芝麻馅汤圆，2 个品牌的豆沙馅汤圆，1 个品牌的五仁馅汤圆. 若将这 5 种汤圆随机地并排摆放在货架的同一层上，则同一种馅料的汤圆相邻的概率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{1}{5}$

10. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的大致图象如图所示，则 $f(x)$ 的最小正周期为



A. $\frac{3\pi}{2}$　　B. $\frac{4\pi}{3}$

C. $\frac{5\pi}{4}$　　D. $\frac{7\pi}{6}$

11. 对于无穷数列 $\{a_n\}$，给出如下三个性质：① $a_1<0$；② $\forall n,s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}>a_n+a_s$；③ $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\exists t\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+t}>a_n$. 定义：同时满足性质①和②的数列 $\{a_n\}$ 为"s 数列"，同时满足性质①和③的数列 $\{a_n\}$ 为"t 数列"，则下列说法错误的是

A. 若 $a_n=2n-3$，则 $\{a_n\}$ 为"s 数列"

B. 若 $a_n=-\frac{1}{2^n}$，则 $\{a_n\}$ 为"t 数列"

C. 若 $\{a_n\}$ 为"s 数列"，则 $\{a_n\}$ 为"t 数列"

D. 若等比数列 $\{a_n\}$ 为"t 数列"，则 $\{a_n\}$ 为"s 数列"

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=f(2+x)$，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=\begin{cases}e^x-1,0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2-4x+4,1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $m|x|\leqslant f(x)$ 的整数解有且仅有 9 个，则实数 m 的取值范围为

A. $\left(\frac{e-1}{7},\frac{e-1}{5}\right]$　　B. $\left[\frac{e-1}{7},\frac{e-1}{5}\right]$

C. $\left(\frac{e-1}{9},\frac{e-1}{7}\right]$　　D. $\left[\frac{e-1}{9},\frac{e-1}{7}\right]$

(Ⅰ)补全2×2列联表,并根据表中数据判断是否有95%的把握认为"选考物理与性别有关";

(Ⅱ)将此样本的频率视为总体的概率,随机调查该校3名学生,设这3人中选考历史的人数为X,求X的分布列及数学期望.

参考公式:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中$n=a+b+c+d$.

参考数据:

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.(12分)

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,且过点$\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,其下顶点为点$A$.若斜率存在的直线$l$交椭圆$E$于$P,Q$两点,且不过点$A$,直线$AP,AQ$分别与$x$轴交于$M$,$N$两点.

(Ⅰ)求椭圆E的方程.

(Ⅱ)当M,N的横坐标的乘积是$\dfrac{4}{3}$时,试探究直线l是否过定点.若过定点,请求出定点坐标;若不过,请说明理由.

21.(12分)

已知函数$f(x)=a\ln(x-1)+x^2+(a-2)x+1-a,a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)讨论$f(x)$的单调性;

(Ⅱ)若$f(x)$存在极值,且$f(x)\geq 0$在$(1,+\infty)$上恒成立,求a的取值范围.

(二)选考题:共10分.请考生在第22,23题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系xOy中,直线l的参数方程为$\begin{cases}x=2+3t,\\ y=1-4t\end{cases}$($t$为参数).以坐标原点为极点,以$x$轴的正半轴为极轴,建立极坐标系,曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2(4-3\sin^2\theta)=4$.

(Ⅰ)求直线l的普通方程和曲线C的直角坐标方程;

(Ⅱ)设点M在直线l上,点N在曲线C上,求$|MN|$的最小值.

23.[选修4-5:不等式选讲](10分)

设函数$f(x)=|x-1|+|3x+1|$.

(Ⅰ)求$f(x)\geq 2x-1$的解集;

(Ⅱ)若不等式$3f(x)\geq 3m^2-m$对任意实数x恒成立,求实数m的取值范围.

天一大联考
2020—2021 学年高中毕业班阶段性测试(六)
理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　A

命题意图　本题考查复数的运算.

解析　$z=\dfrac{2\,021-\mathrm{i}}{1+2\,021\mathrm{i}}=\dfrac{(2\,021-\mathrm{i})(1-2\,021\mathrm{i})}{(1+2\,021\mathrm{i})(1-2\,021\mathrm{i})}=\dfrac{-\mathrm{i}(1+2\,021^2)}{1+2\,021^2}=-\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=\mathrm{i}$.

2. 答案　C

命题意图　本题考查集合的运算.

解析　$\because A=\{x\,|\,|x|<1\}=\{x\,|\,-1<x<1\}$,$B=\{x\,|\,\log_2x\leqslant 2\}=\{x\,|\,0<x\leqslant 4\}$,$\therefore A\cup B=\{x\,|\,-1<x\leqslant 4\}=(-1,4]$.

3. 答案　B

命题意图　本题考查用样本频率估计总体的概率.

解析　由表格数据知,最高气温低于 25 ℃的频率为 $\dfrac{3+6}{90}=0.1$,所以 6 月份这种冷饮一天的需求量不超过 300 瓶的概率估计值为 0.1.

4. 答案　B

命题意图　本题考查数学文化及三角恒等变换.

解析　由题意可知 $\dfrac{\sqrt{3}\sin 12°+m}{\cos 12°}=\dfrac{\sqrt{3}\sin 12°+2\sin 18°}{\cos 12°}=\dfrac{\sqrt{3}\sin 12°+2\sin(30°-12°)}{\cos 12°}=$

$\dfrac{\sqrt{3}\sin 12°+2\left(\dfrac{1}{2}\cos 12°-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 12°\right)}{\cos 12°}=\dfrac{\cos 12°}{\cos 12°}=1$.

5. 答案　D

命题意图　本题考查二项式定理.

解析　$\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_4^r\cdot(2x)^{4-r}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^r\cdot 2^{4-r}\cdot\mathrm{C}_4^r\cdot x^{4-r-\frac{r}{2}}=(-1)^r\cdot 2^{4-r}\cdot\mathrm{C}_4^r\cdot x^{\frac{8-3r}{2}}$. 令 $\dfrac{8-3r}{2}=1$,解得 $r=2$,所以展开式中 x 的系数为 $(-1)^2\cdot 2^2\cdot\mathrm{C}_4^2=24$.

6. 答案　A

命题意图　本题考查指数、对数的大小比较.

解析　由 $\mathrm{e}^a=\pi$ 得 $a=\ln\pi\in(\ln\mathrm{e},\ln\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}})$,即 $a\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$,由 $2^b=3$ 得 $b=\log_2 3>\log_2 2\sqrt{2}=\dfrac{3}{2}$,$c=\sin 2\,021°<1$,所以 $c<1<a<\dfrac{3}{2}<b$.

7. 答案　A

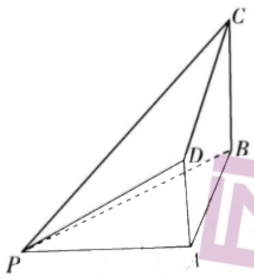
命题意图　本题考查向量的夹角.

解析　$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=\sqrt{\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}=\sqrt{2-2\cos\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\rangle}$,$2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\cos\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\rangle$,得 $\sqrt{2-2\cos\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\rangle}=2\cos\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\rangle$,解得 $\cos\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\rangle=\dfrac{1}{2}$(负值舍去),故 $\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$,即 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

8. **答案** D

命题意图 本题考查三视图及几何体的体积.

解析 几何体可还原为如图所示的四棱锥 $P-ABCD$，其底面为直角梯形，面积为 $S=\frac{1}{2}\times AB\times(AD+BC)=3$，四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 $PA=2$，则 $V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h=2$.



9. **答案** D

命题意图 本题考查排列组合及概率的计算.

解析 同一种馅料的汤圆相邻的排法有 $A_3^3A_2^2A_2^2$ 种，5 种汤圆随机排，共有 A_5^5 种排法，故所求概率 $P=\frac{A_3^3A_2^2A_2^2}{A_5^5}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$.

10. **答案** B

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 根据题意可知 $-\frac{2\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=-\frac{9}{2}k+\frac{3}{2},k\in\mathbf{Z}$，又 $\pi<\frac{2\pi}{\omega}<2\pi$，解得 $1<\omega<2$，当且仅当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{3}{2}$ 满足题意，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi}{3}$.

11. **答案** C

命题意图 本题考查新定义数列及等差数列、等比数列的性质. 微信搜试卷答案公众号

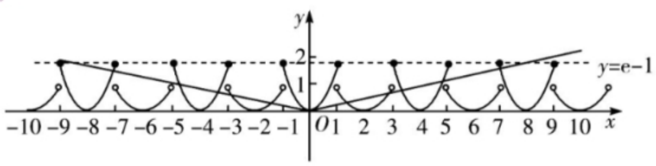
解析 由题意，若等差数列 $\{a_n\}$ 为"s 数列"，其公差为 d，则由性质②得 $a_1+(n+s-1)d>a_1+(n-1)d+a_1+(s-1)d$，即 $a_1<d$；由性质③得 $a_1+(n+t-1)d>a_1+(n-1)d$，即 $d>0$. 故 $a_n=2n-3$ 满足性质①②，故选项 A 正确，若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d<0$，则不满足性质③，故选项 C 不正确.

若等比数列 $\{a_n\}$ 为"t 数列"，则当公比 $q>0$ 时，由 $a_1<0$ 得 $a_n<0$. 由性质③得 $a_nq^t>a_n$，即 $a_n(q^t-1)>0$，所以 $q^t-1<0$，即 $q^t<1$，故 $0<q<1$. 当公比 $q<0$ 时，由 $a_1<0$，得 $a_2>0$. 由性质③知 $a_{2+t}>a_2$，即 $a_2(q^t-1)>0$，所以 $q^t>1$，故 $a_{1+t}=a_1q^t<a_1$，这与性质③不符，所以 $q<0$ 不成立. 综上，若等比数列 $\{a_n\}$ 为"t 数列"，则公比 $q\in(0,1)$，故 $a_n=-\frac{1}{2^n}$ 满足性质①③，故选项 B 正确. 若 $q\in(0,1)$，则 $a_{n+1}=a_nq>a_n$，即数列 $\{a_n\}$ 为递增数列. 又 $a_n<0$，故对于任意的 $n,s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}>a_n+a_s$，即数列 $\{a_n\}$ 满足性质②，即为"s 数列"，故选项 D 正确.

12. **答案** C

命题意图 本题考查函数的图象与性质及不等式与函数的结合.

解析 $\because f(-x)=f(x),f(2-x)=f(2+x)$，$\therefore f(2+x)=f(-x-2)=f(-x+2)$，$\therefore f(x+4)=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示. 令 $g(x)=m|x|$，将 $g(x)$ 的图象绕坐标原点旋转可得 $\begin{cases}7m\leqslant e-1,\\9m>e-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m\leqslant\frac{e-1}{7},\\m>\frac{e-1}{9},\end{cases}$ 则实数 m 的取值范围为 $\left(\frac{e-1}{9},\frac{e-1}{7}\right]$.



二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 答案　4

命题意图　本题考查抛物线的定义.

解析　根据抛物线定义可知，点 M 到焦点 F 的距离等于到准线的距离，又因为点 M 到焦点 F 的距离与到 y 轴的距离之差为2，故 $\frac{p}{2}=2$，故 $p=4$.

14. 答案　$\frac{49}{16}$

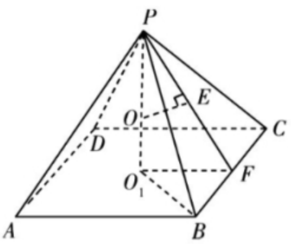
命题意图　本题考查等差数列及等比数列的性质.

解析　设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$. 由题意知 $a_5^2=a_3\cdot a_{10}$，即 $(a_3+2d)^2=a_3(a_3+7d)$，即 $a_3^2+4a_3d+4d^2=a_3^2+7a_3d$，$\because d\neq 0$，$\therefore d=\frac{3}{4}a_3$，$\therefore \frac{S_7}{a_7}=\frac{7(a_3+d)}{a_3+4d}=\frac{49}{16}$.

15. 答案　$\frac{\sqrt{2}r}{1-r^2}$

命题意图　本题考查棱锥的内切球及线面角.

解析　设内切球的球心为 O，内切球与四棱锥底面的切点为 O_1，与侧面 PBC 的切点为 E，作辅助线如图所示，则 $\triangle OPE\backsim\triangle FPO_1$，设 $O_1P=h$，则 $\frac{OE}{O_1F}=\frac{OP}{PF}$，即 $\frac{r}{1}=\frac{h-r}{\sqrt{h^2+1}}$，化简得 $h[(r^2-1)h+2r]=0$，解得 $h=\frac{2r}{1-r^2}$ 或 $h=0$（舍去），又 $O_1B=\sqrt{2}$，所以侧棱与底面所成角的正切值为 $\frac{O_1P}{O_1B}=\frac{\frac{2r}{1-r^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}r}{1-r^2}$.



16. 答案　$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$

命题意图　本题考查双曲线的离心率及直线与双曲线的位置关系.

解析　设双曲线的半焦距为 $c(c>0)$，则 $F(c,0)$. 依题意，取双曲线的渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，则 AF 的方程为 $y=-\frac{a}{b}(x-c)$，所以点 $A\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，所以 $\triangle OAF$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times c\times\frac{ab}{c}=\frac{1}{2}ab=2$，即 $ab=4$. 因为 $e=\frac{c}{a}$，所以 $e^2=1+\frac{16}{a^4}$，因为 $e\in[\sqrt{17},\sqrt{65}]$，所以 $17\leqslant 1+\frac{16}{a^4}\leqslant 65$，因为 $a>0$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 1$.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 命题意图　本题考查正、余弦定理及基本不等式的应用.微信搜试卷答案公众号

解析　（Ⅰ）因为 $c\sin 2B+2b\sin B\cos C=2\sqrt{3}b\cos A$，

所以 $2c\sin B\cos B+2b\sin B\cos C=2\sqrt{3}b\cos A$.

由正弦定理可得 $2\sin C\sin B\cos B+2\sin B\sin B\cos C=2\sqrt{3}\sin B\cos A$. ……………………（3分）

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，即 $\tan A=\sqrt{3}$. ……………………（5分）

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………………（6分）

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $A=\frac{\pi}{3}$,所以 $b^2+c^2-16=2bc\cos A=bc$.

因为 $bc>0$,所以 $b^2+c^2-16>0$.

由基本不等式可得 $b^2+c^2-16\leqslant\frac{b^2+c^2}{2}$,

所以 $b^2+c^2\leqslant 32$,故 $16<b^2+c^2\leqslant 32$. ………………………………(8 分)

设 $\angle ADB=\theta$,则 $c^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+AD^2-a\cdot AD\cos\theta$,

$b^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+AD^2-a\cdot AD\cos(\pi-\theta)$, ………………………………(10 分)

所以 $2AD^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2}$,

所以 $4<AD^2\leqslant 12$,所以 $AD\in(2,2\sqrt{3}]$. ………………………………(12 分)

18. **命题意图** 本题考查面面垂直的证明及二面角的求解.

解析 (Ⅰ)如图,过 C 作 $CF\perp AB$ 于 F.由题意可知,在直角梯形 $ABCD$ 中,$\angle DAB=\frac{\pi}{2}$,$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,$AB=2DC=2$,

所以 $AF=BF=DC=1$, ………………………………(1 分)

$AD=CF=\sqrt{3}$. ………………………………(2 分)

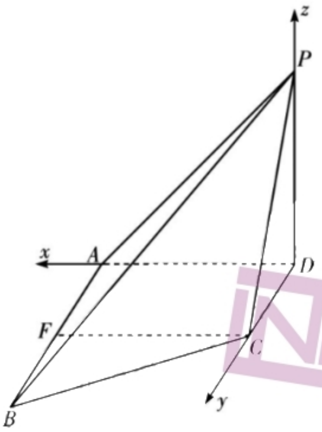
又 $PD=\sqrt{3}$,$PA=\sqrt{6}$,所以 $PA^2=AD^2+PD^2$,

所以 $AD\perp PD$. ………………………………(3 分)

因为 $CD\perp PD$,

又 $AD\cap DC=D$,所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………(4 分)

因为 $PD\subset$ 平面 PAD,所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………(5 分)



(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,PD,DA,DC 两两垂直,故可以 D 点为坐标原点,以 DA,DC,DP 分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

易知 $A(\sqrt{3},0,0)$,$B(\sqrt{3},2,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$C(0,1,0)$, ………………………………(6 分)

则 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},2,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{PC}=(0,1,-\sqrt{3})$. ………………………………(7 分)

设平面 APB 的法向量为 $\boldsymbol{\mu}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{\mu}=2y_1=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{\mu}=\sqrt{3}x_1+2y_1-\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$,则 $y_1=0$,$z_1=1$,即 $\boldsymbol{\mu}=(1,0,1)$. ………………………………(8 分)

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{v}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot \boldsymbol{v}=y_2-\sqrt{3}z_2=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot \boldsymbol{v}=\sqrt{3}x_2+2y_2-\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$

令$z_2=1$，则$y_2=\sqrt{3}$，$x_2=-1$，即$\boldsymbol{v}=(-1,\sqrt{3},1)$. ………………………………（9分）

所以$\cos\langle\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{v}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{\mu}||\boldsymbol{v}|}=0$，………………………………（11分）

即二面角$A-PB-C$的大小为$\dfrac{\pi}{2}$. ………………………………（12分）

19. **命题意图** 本题考查独立性检验及随机变量的分布列和数学期望.

解析 （Ⅰ）根据题意补全2×2列联表，如下：

	选考物理	选考历史	总计
男生	40	10	50
女生	30	20	50
总计	70	30	100

………………………………（3分）

根据表中数据，可得$K^2=\dfrac{100\times(40\times20-10\times30)^2}{50\times50\times70\times30}\approx4.762>3.841$，

故有95%的把握认为"选考物理与性别有关." ………………………………（6分）

（Ⅱ）X的所有可能取值为0，1，2，3，随机变量X服从二项分布，

由题意，可得学生选考历史的概率为$\dfrac{3}{10}$，且$X\sim B\left(3,\dfrac{3}{10}\right)$. ………………………………（7分）

$P(X=0)=C_3^0\left(\dfrac{7}{10}\right)^3=\dfrac{343}{1\,000}$，

$P(X=1)=C_3^1\left(\dfrac{3}{10}\right)^1\left(\dfrac{7}{10}\right)^2=\dfrac{441}{1\,000}$，

$P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{3}{10}\right)^2\left(\dfrac{7}{10}\right)^1=\dfrac{189}{1\,000}$，

$P(X=3)=C_3^3\left(\dfrac{3}{10}\right)^3=\dfrac{27}{1\,000}$.

X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{343}{1\,000}$	$\dfrac{441}{1\,000}$	$\dfrac{189}{1\,000}$	$\dfrac{27}{1\,000}$

………………………………（10分）

$E(X)=3\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{10}$. ………………………………（12分）

20. **命题意图** 本题考查椭圆的方程及性质、直线与椭圆的位置关系. 微信搜试卷答案公众号

解析 （Ⅰ）由$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，可得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，

将$\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$代入椭圆方程，得$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，………………………………（2分）

解得$\begin{cases}b^2=1,\\a^2=4,\end{cases}$所以椭圆$E$的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………（4分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$A(0,-1)$. 设直线PQ的方程为$y=kx+m(m\neq-1)$，P，Q的坐标分别为$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1+1}{x_1}x-1$,

令 $y=0$,得点 M 的横坐标为 $x_M=\frac{x_1}{y_1+1}$. ……………………………………………………………………（6分）

直线 AQ 的方程为 $y=\frac{y_2+1}{x_2}x-1$,

令 $y=0$,得点 N 的横坐标为 $x_N=\frac{x_2}{y_2+1}$. ……………………………………………………………………（7分）

所以 $x_M\cdot x_N=\frac{x_1x_2}{(y_1+1)(y_2+1)}=\frac{x_1x_2}{(kx_1+m+1)(kx_2+m+1)}$

$=\frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+k(m+1)(x_1+x_2)+(m+1)^2}$. ……………………………………………………………（8分）

把 $y=kx+m$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$,

由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$,$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$, ……………………………………………（10分）

又由 $x_M\cdot x_N=\frac{4}{3}$,得 $\frac{4(m-1)}{m+1}=\frac{4}{3}$,解得 $m=2$,所以直线 l 过定点 $(0,2)$. …………………………（12分）

21. **命题意图** 本题考查导数在函数及不等式恒成立问题中的应用.

解析 （Ⅰ）根据题意可知,$f(x)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$,$f'(x)=\frac{2x^2+(a-4)x+2}{x-1}$.

令 $g(x)=2x^2+(a-4)x+2$,对称轴为 $x=-\frac{a-4}{2\times2}=1-\frac{a}{4}$. ……………………………………………（2分）

当 $1-\frac{a}{4}\leqslant1$,即 $a\geqslant0$ 时,$g(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,微信搜试卷答案公众号

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增; ……………………………………………………………………………（3分）

当 $1-\frac{a}{4}>1$,即 $a<0$ 时,令 $g(x)=0$,得 $\Delta=(a-4)^2-16=a^2-8a>0$ 恒成立,

$x_1=\frac{4-a-\sqrt{a^2-8a}}{4}<1$,$x_2=\frac{4-a+\sqrt{a^2-8a}}{4}>1$.

所以在 $\left(1,\frac{4-a+\sqrt{a^2-8a}}{4}\right)$ 上 $g(x)<0$,即 $f(x)$ 在 $\left(1,\frac{4-a+\sqrt{a^2-8a}}{4}\right)$ 上单调递减;在 $\left(\frac{4-a+\sqrt{a^2-8a}}{4},+\infty\right)$ 上 $g(x)>0$,即 $f(x)$ 在 $\left(\frac{4-a+\sqrt{a^2-8a}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增. ………………（5分）

综上所述,当 $a\geqslant0$ 时,$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增;当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(1,\frac{4-a+\sqrt{a^2-8a}}{4}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{4-a+\sqrt{a^2-8a}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………………………………………………………（6分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知,若 $f(x)$ 存在极值,则 $a<0$.

$\forall x\in(1,+\infty)$,不等式 $f(x)\geqslant0$ 恒成立,等价于 $\frac{\ln(x-1)+x-1}{x^2-2x+1}\leqslant-\frac{1}{a}$ 恒成立. ……………………（8分）

令 $t=x-1$,$h(t)=\frac{\ln t+t}{t^2}$,$t\in(0,+\infty)$,则 $h'(t)=\frac{1-t-2\ln t}{t^3}$. ………………………………………（9分）

令 $\varphi(t)=1-t-2\ln t$,则 $\varphi'(t)=-1-\frac{2}{t}<0$,

所以 $\varphi(t)=1-t-2\ln t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………………………………………（10分）

因为 $\varphi(1)=0$，所以当 $t\in(0,1)$ 时，$\varphi(t)>0$，$h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi(t)<0$，$h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，…………（11 分）

所以 $h(t)\leqslant h(1)=1$，即 $1\leqslant -\dfrac{1}{a}$，解得 $-1\leqslant a<0$. …………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查参数方程和普通方程的互化、极坐标方程与直角坐标方程的互化.

解析 （Ⅰ）消去参数 t 得直线 $l:4x+3y-11=0$. …………（2 分）

曲线 $C:4\rho^2-3\rho^2\sin^2\theta=4$，

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$. …………（5 分）

（Ⅱ）曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），设点 $N(\cos\beta,2\sin\beta)$.

因为点 N 到直线 l 的距离为 $\dfrac{|4\cos\beta+6\sin\beta-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|2\sqrt{13}\sin(\beta+\varphi)-11|}{5}$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{2}{3}$，…………（8 分）

所以 $|MN|_{\min}=\dfrac{11-2\sqrt{13}}{5}$. …………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的求解.

解析 （Ⅰ）由题意得 $f(x)=\begin{cases}4x, x>1,\\ 2x+2, -\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,\\ -4x, x<-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$ …………（2 分）

因为 $f(x)\geqslant 2x-1$，所以 $\begin{cases}x>1,\\ 4x\geqslant 2x-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x+2\geqslant 2x-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-\dfrac{1}{3},\\ -4x\geqslant 2x-1,\end{cases}$ …………（3 分）

解得 $x>1$ 或 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x<-\dfrac{1}{3}$，…………（4 分）

所以 $f(x)\geqslant 2x-1$ 的解集为 $\mathbf{R}$. …………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)$ 的最小值为 $2\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2=\dfrac{4}{3}$. …………（7 分）

因为不等式 $3f(x)\geqslant 3m^2-m$ 对任意实数 x 恒成立，

所以 $3\times\dfrac{4}{3}\geqslant 3m^2-m$，即 $3m^2-m-4\leqslant 0$，$(m+1)(3m-4)\leqslant 0$，所以 $-1\leqslant m\leqslant\dfrac{4}{3}$，…………（9 分）

故实数 m 的取值范围是 $\left[-1,\dfrac{4}{3}\right]$. …………（10 分）