

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{1}{x} > 1 \right\}$, $B = \left\{ -2, \frac{1}{2}, 3 \right\}$, 则 $A \cap B =$

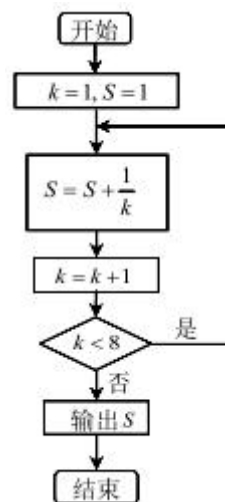
- (A) $\left\{ -2, \frac{1}{2} \right\}$ (B) $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$ (C) $\left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$ (D) ϕ

(2) 若复数 $z = i \cdot (a - i)$ 满足 $|z| \geq 2$, 则实数 a 的取值范围是

- (A) $[\sqrt{3}, +\infty)$ (B) $[-1, 1]$
(C) $(-\infty, \sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

(3) 执行如图所示的程序框图，则输出的 S 值等于

- (A) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8}$
(B) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7}$
(C) $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8}$
(D) $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7}$



(4) 在极坐标系中，直线 $\rho \cos \theta = 2$ 与圆 $\rho = 4 \cos \theta$ 交于 A, B 两点，则 $|AB| =$

- (A) 4 (B) $2\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{3}$

(5) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 则“函数 $y = |f(x)|$ 的图像关于 y 轴对称”是“函数 $f(x)$ 为奇函数”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(6) 若实数 x, y, z 互不相等，且满足 $2^x = 3^y = \log_4 z$, 则

- (A) $z > x > y$ (B) $z > y > x$
(C) $z > x, z > y$ (D) 以上三个答案都不正确

(7) 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1, 平面 α 与该正四面体相交，对于实数 $d(0 < d < 1)$,

记正四面体 $ABCD$ 的四个顶点中到平面 α 的距离等于 d 的点的个数为 m ，那么下列结论中正确的是

- (A) m 不可能等于 2 (B) m 不可能等于 3
(C) m 不可能等于 4 (D) 以上三个答案都不正确

(8) 设 f 是平面直角坐标系 xOy 到自身的一个映射，点 $P(x, y)$ 在映射 f 下的像为点 $Q(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$ ，记作 $Q = f(P)$ ，已知 $P_1(16, 8), P_{n+1} = f(P_n)$ ，其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ ，那么对于任意的正整数 n ，

- (A) 存在点 M ，使得 $|MP_n| \leq 10$
(B) 不存在点 M ，使得 $|MP_n| \leq 5\sqrt{5}$
(C) 存在无数个点 M ，使得 $|MP_n| \leq 6\sqrt{5}$
(D) 存在唯一的点 M ，使得 $|MP_n| \leq 8\sqrt{5}$

第二部分（非选择题共 1 10 分）

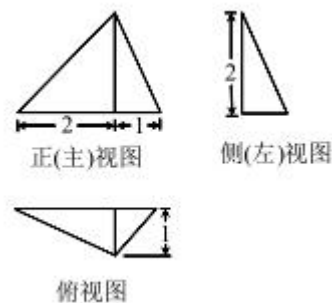
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) 在二项式 $(1-x)^5$ 的展开式中， x^2 的系数是_____

(10) 以椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 在 x 轴上的顶点和焦点分别为焦点和顶点的双曲线方程为_____；此双曲线的渐近线方程为_____

(11) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a = \sqrt{2}b, b = \sqrt{2}c$ ，则三个内角中最大角的余弦值为_____

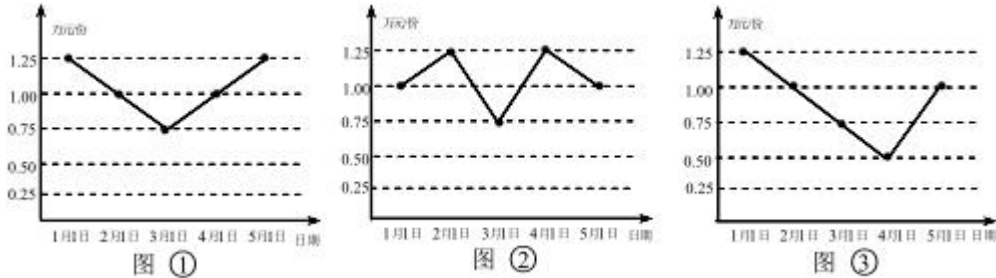
(12) 某三棱锥的三视图如图所示，则在该三棱锥表面的四个三角形中，等腰三角形的个数为_____。



(13) 能说明“设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，对于任意的 $n \in N^*$ ，若 $a_{n+1} > a_n$ ，则 $S_{n+1} > S_n$ ”

为假命题的一个等差数列是____。(写出数列的通项公式)

(14) 因市场战略储备的需要, 某公司 1 月 1 日起, 每月 1 日购买了相同金额的某种物资, 连续购买了 4 次。由于市场变化, 5 月 1 日该公司不得不将此物资全部卖出。已知该物资的购买和卖出都是以份为计价单位进行交易, 且该公司在买卖的过程中没有亏本, 那么下面三个折线图中反映了这种物资每份价格 (单位: 万元) 的可能变化情况是_____ (写出所有正确的图标序号)



三、解答题共 6 小题, 共 80 分, 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

(15) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 2 \sin x \cos x$

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到的图像对应的函数解析式为 $g(x)$,

求 $g(x)$ 的单调递增区间.

(16) (本小题满分 13 分)

10 月 1 日, 某品牌的两款最新手机 (记为 W 型号, T 型号) 同时投放市场, 手机厂商为了解这两款手机的销售情况, 在 10 月 1 日当天, 随机调查了 5 个手机店中这两款手机的销量 (单位: 部), 得到下表

手机店	A	B	C	D	E
W 型号手机销量	6	6	13	8	11
T 型号手机销量	12	9	13	6	4

(I) 若在 10 月 1 日当天, 从 A, B 这两个手机店售出的新款手机中随机抽取 1 部, 秋抽取的 2 部手机中至少有一部为 W 型号手机的概率;

(II) 现从这 5 个手机店中任选 3 个举行促销活动, 用 X 表示其中 W 型号手机销量超过 T 型号手机销量的手机店的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

(III) 经测算, W 型号手机的销售成本 η (百元) 与销量 ξ (部) 满足关系 $\eta = 3\xi + 4$.

若表中 W 型号手机销量的方差 $S_0^2 = m(m > 0)$ ，试给出表中 5 个手机店的 W 型号手机销售成本的方差 S^2 的值。（用 m 表示，结论不要求证明）

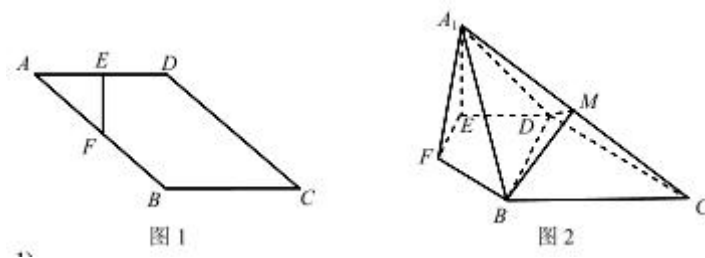
(17) (本小题满分 14 分)

如图 1，在平行四边形 $ABCD$ 中， E ， F 分别为 AB ， AD 中点， $AD=4$ ， $AB=4\sqrt{2}$ ， $\angle A=45^\circ$ 。将 $\triangle AEF$ 沿折起到 $\triangle A_1EF$ 位置，使得平面 $A_1EF \perp$ 平面 $BCDEF$ ，如图 2。记 A_1C 的中点为 M 。

(I) 求证： $A_1E \perp CD$ ；

(II) 求二面角 $M-DB-C$ 的大小；

(III) 设 N 为线段 A_1D 上的一点，试给出点 N 满足的一个条件，使得平面 $NEF \parallel$ 平面 MBD ，并证明你的结论。



(18) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = x(\ln x + 1)$ ，其中 $a \neq 0$ 。

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率小于 1，求 x_0 的取值范围；

(II) 设整数 k 使得 $f(x) \geq k(x - \frac{1}{2})$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，求整数 k 的最大值。

(19) (本小题满分 14 分)

已知抛物线 $W: y^2 = 2px$ 的准线方程为 $x = -1$ ，焦点为 F ， F 为抛物线上异于原点 O 的一点。

(I) 若 $|AF| = 5$ ，求以线段 OA 为直径的圆的方程；

(II) 设过点 F 且平行于 OA 的直线 l 交抛物线 W 于 B, C 两点，判断四边形 $OABC$ 能否为

等腰梯形？若能，求直线 l 的方程；若不能，请说明理由。

(20) (本小题满分 13 分)

对于向量 $X_0 = (a_0, b_0, c_0)$ ，若 a_0, b_0, c_0 三数互不相等，令向量 $X_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1})$ ，

其中 $a_{i+1} = |a_i - b_i|$ ， $b_{i+1} = |b_i - c_i|$ ， $c_{i+1} = |c_i - a_i|$ ， $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

(I) 当 $X_0 = (5, 2, 1)$ 时，试写出向量 X_{100}

(II) 证明：对于任意的 $i \in N$ ，向量 X_i 中的三个数 a_i, b_i, c_i 至多有一个为 0；

(III) 若 $a_0, b_0, c_0 \in N$ ，证明：存在实数 t ，使得 $X_t = X_{t+3}$

北京市西城区高三模拟测试

数学（理科）参考答案及评分标准

2019.5

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. B | 2. C | 3. D | 4. A |
| 5. B | 6. C | 7. D | 8. C |

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

- | | | | |
|-------|---|---------------------------|--|
| 9. 10 | 10. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, y = \pm 2x$ | 11. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ | |
| 12. 2 | 13. 答案不唯一，如 $a_n = n - 4$ | 14. ① ③ | |

注：第 10 题第一问 3 分，第二问 2 分；第 14 题漏选、多选或错选均不得分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15. (本小题满分 13 分)

解：(I) 因为 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 2\sin x \cos x$

$$= \cos 2x \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{6} + \sin 2x \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$$

$$= \sqrt{3} \sin(2x + \frac{\pi}{6}). \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. \dots\dots\dots 8 分

(II) 由 (I), 知 $f(x) = \sqrt{3} \sin(2x + \frac{\pi}{6})$,

所以 $g(x) = \sqrt{3} \sin[2(x + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}] = \sqrt{3} \sin(2x + \frac{5\pi}{6})$. \dots\dots\dots 10 分

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{5\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

得 $-\frac{2\pi}{3} + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi$,

所以 $g(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{2\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$. \dots\dots\dots 13 分

(注：单调区间写成开区间不扣分)

专注名校自主招生

16. (本小题满分 14 分)

解: (I) 将从 A, B 这两个手机店售出的新款手机中分别随机抽取的 1 部手机记为甲和乙, 记事件“甲手机为 T 型号手机”为 M_1 , 记事件“乙手机为 T 型号手机”为 M_2 ,

依题意, 有 $P(M_1) = \frac{12}{6+12} = \frac{2}{3}$, $P(M_2) = \frac{9}{6+9} = \frac{3}{5}$, 且事件 M_1, M_2 相互独立.
..... 2 分

设“抽取的 2 部手机中至少有 1 部为 W 型号手机”为事件 M ,

$$\text{则 } P(M) = 1 - P(M_1 \cdot M_2) = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

即抽取的 2 部手机中至少有 1 部为 W 型号手机的概率为 $\frac{3}{5}$.
..... 4 分

(II) 由表可知: W 型号手机销售量超过 T 型号的手机店共有 2 个,

故 X 的所有可能取值为: 0, 1, 2.
..... 5 分

$$\text{且 } P(X=0) = \frac{C_2^0 \cdot C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}, \quad P(X=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}, \quad P(X=2) = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}.$$

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

..... 8 分

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}.$$

..... 10 分

(III) $s^2 = 9m$.
..... 13 分

17. (本小题满分 14 分)

解: (I) 在图 1 中, 由 $AE=2$, $AF=2\sqrt{2}$, $\angle A=45^\circ$, 得 $AE \perp EF$.

所以在图 2 中 $A_1E \perp EF$.
..... 1 分

因为平面 $A_1EF \perp$ 平面 $BCDEF$, 平面 $A_1EF \cap$ 平面 $BCDEF = EF$,

所以 $A_1E \perp$ 平面 $BCDEF$.
..... 3 分

又因为 $CD \subset$ 平面 $BCDEF$,

所以 $A_1E \perp CD$.
..... 4 分

专注名校自主招生

(II) 由(I)可得 EF, ED, EA_1 两两垂直, 故以 EF, ED, EA_1 分别为 x 轴、 y 轴和 z 轴, 如图建立空间直角坐标系, 5分

则 $E(0,0,0), F(2,0,0), D(0,2,0), B(4,2,0), C(4,6,0), A_1(0,0,2), M(2,3,1)$.

所以 $\overrightarrow{DB} = (4,0,0), \overrightarrow{DM} = (2,1,1)$.

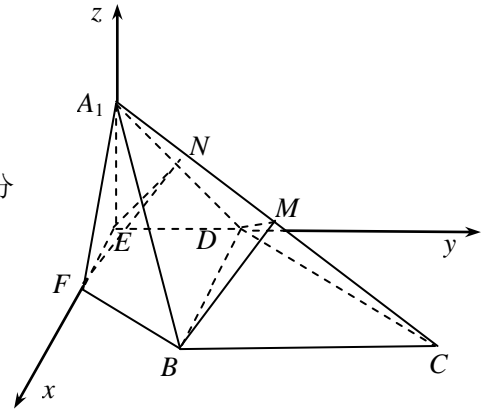
设平面 MBD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

由 $\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DM} = 0$, 得 $\begin{cases} 4x = 0, \\ 2x + y + z = 0, \end{cases}$

令 $y = 1$, 得 $\mathbf{m} = (0, 1, -1)$ 7分

易得平面 BCD 的法向量 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$.

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



由图可得二面角 $M-BD-C$ 为锐二面角,

所以二面角 $M-BD-C$ 的大小为 45° 9分

(III) 当 N 为线段 A_1D 的中点 (注: 表述不唯一) 时, 平面 $NEF \parallel$ 平面 MBD 10分

证明如下:

由 N 为线段 A_1D 的中点, 得 $N(0,1,1)$.

所以 $\overrightarrow{EN} = (0,1,1)$, 又因为 $\overrightarrow{EF} = (2,0,0)$,

设平面 NEF 的法向量为 $\mathbf{u} = (a, b, c)$,

由 $\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{EN} = 0, \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$, 得 $\begin{cases} b + c = 0, \\ 2a = 0, \end{cases}$

令 $c = 1$, 得 $\mathbf{u} = (0, -1, 1)$ 12分

又因为平面 MBD 的法向量为 $\mathbf{m} = (0, 1, -1)$,

所以 $\mathbf{m} = -\mathbf{u}$, 即 $\mathbf{m} \parallel \mathbf{u}$,

所以平面 $NEF \parallel$ 平面 MBD 14分

18. (本小题满分 13 分)

解: (I) 求导, 得 $f'(x) = 2 + \ln x$, 1 分

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $f'(x_0) = 2 + \ln x_0$ 3 分

由题意, 得 $2 + \ln x_0 < 1$,

解得 $0 < x_0 < e^{-1}$ 5 分

(II) “ $f(x) \geq k(x - \frac{1}{2})$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立” 等价于 “当 $x > 0$ 时, $f(x) - k(x - \frac{1}{2}) \geq 0$ 恒成立”.

令 $g(x) = f(x) - k(x - \frac{1}{2}) = x \ln x + (1-k)x + \frac{1}{2}k$, 7 分

求导, 得 $g'(x) = \ln x + 2 - k$,

由 $g'(x) = 0$, 得 $x = e^{k-2}$ 8 分

随着 x 变化, $g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(0, e^{k-2})$	e^{k-2}	$(e^{k-2}, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

所以 $g(x)$ 在 $(0, e^{k-2})$ 上单调递减, 在 $(e^{k-2}, +\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $g(x)$ 的最小值 $g(e^{k-2}) = \frac{1}{2}k - e^{k-2} \geq 0$ 10 分

令 $h(k) = \frac{1}{2}k - e^{k-2}$, 则 $h(2) = \frac{1}{2} \times 2 - e^{2-2} = 0$,

当 $k = 2$ 时,

因为 $g(x)$ 的最小值 $g(e^{k-2}) = g(1) = 0$,

所以 $f(x) \geq k(x - \frac{1}{2})$ 对于 $x > 0$ 恒成立, 符合题意; 11 分

当 $k > 2$ 时,

由 $h'(k) = \frac{1}{2} - e^{k-2} < \frac{1}{2} - e^{2-2} < 0$, 得函数 $h(k) = \frac{1}{2}k - e^{k-2}$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递减,

所以 $h(k) < h(2) = 0$,

故此时 $g(x)$ 的最小值 $g(e^{k-2}) = h(k) < 0$, 不符合题意.

所以整数 k 的最大值是 2. 13 分

19. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由题意, 可知 $\frac{p}{2}=1$, 所以 $p=2$ 1 分

所以抛物线方程为 $y^2=4x$, 焦点为 $F(1,0)$.

不妨设 $A(x_0, y_0)$, 则 $|AF|=x_0+1=5$, 解得 $x_0=4$.

代入抛物线方程, 得 $y_0=\pm 4$, 则点 A 的坐标为 $(4, 4)$ 或 $(4, -4)$,

所以 $|OA|=4\sqrt{2}$ 3 分

故以 OA 为直径的圆的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$ 或 $(x-2)^2+(y+2)^2=8$ 5 分

(II) 结论: 四边形 $OABC$ 不可能为等腰梯形. 6 分

理由如下:

假设四边形 $OABC$ 为等腰梯形,

由题意, 可知直线 OA 的斜率 k 存在且不为零,

故设直线 OA 的方程为 $y=kx$, 直线 BC 的方程为 $y=k(x-1)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$,

..... 7 分

$$\text{联立} \begin{cases} y=kx, \\ y^2=4x, \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } k^2x^2-4x=0,$$

$$\text{解得 } x=0 \text{ 或 } x=\frac{4}{k^2},$$

所以点 $A(\frac{4}{k^2}, \frac{4}{k})$, 线段 OA 的中点 M 的坐标为 $(\frac{2}{k^2}, \frac{2}{k})$ 9 分

$$\text{联立} \begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0.$$

因为直线 BC 过焦点 $F(1,0)$, 斜率存在且不为 0, 所以 $\Delta > 0$ 恒成立,

$$\text{所以 } x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}, \quad x_1x_2=1. \quad \text{..... 11 分}$$

设线段 BC 的中点为 $N(x_3, y_3)$,

$$\text{则 } x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k^2+2}{k^2}, \quad y_3=k(x_3-1)=\frac{2}{k}, \quad \text{故 } N(\frac{k^2+2}{k^2}, \frac{2}{k}). \quad \text{..... 12 分}$$

$$\text{因为直线 } MN \text{ 的斜率 } k_{MN}=\frac{\frac{2}{k}-\frac{2}{k}}{\frac{k^2+2}{k^2}-\frac{2}{k^2}}=0, \quad \text{OA 的斜率为 } k,$$

所以 $k_{MN} \cdot k \neq -1$ ，故直线 MN 与直线 OA 不垂直。

这与等腰梯形上下底中点的连线垂直于上下底矛盾，

所以四边形 $OABC$ 不可能为等腰梯形。 14 分

20. (本小题满分 13 分)

解: (I) $X_{100} = (1, 1, 0)$ 3 分

(II) 假设 a_i, b_i, c_i 三个数中有 2 个为 0, 或三个数均为 0. 4 分

(1) 当 a_i, b_i, c_i 三个数中有 2 个为 0 时, 显然 $i \geq 1$.

不妨设 $a_i = b_i = 0 (i \geq 1), c_i \neq 0$,

则 $a_i = |a_{i-1} - b_{i-1}| = 0, b_i = |b_{i-1} - c_{i-1}| = 0$, 即 $a_{i-1} = b_{i-1} = c_{i-1}$.

这与 $c_i = |c_{i-1} - a_{i-1}| \neq 0$ 矛盾; 6 分

(2) 当 a_i, b_i, c_i 三个数均为 0 时, 显然 $i \geq 1$.

则 $a_i = |a_{i-1} - b_{i-1}| = 0, b_i = |b_{i-1} - c_{i-1}| = 0, c_i = |c_{i-1} - a_{i-1}| = 0$.

所以 $a_{i-1} = b_{i-1} = c_{i-1} = w$ (定值).

由 a_0, b_0, c_0 三数互不相等,

得 $i \geq 2$, 且 $a_{i-1} = |a_{i-2} - b_{i-2}| = w, b_{i-1} = |b_{i-2} - c_{i-2}| = w, c_{i-1} = |c_{i-2} - a_{i-2}| = w$.

不妨设 $a_{i-2} \leq b_{i-2} \leq c_{i-2}$, 则有 $b_{i-2} - a_{i-2} = w, c_{i-2} - b_{i-2} = w, c_{i-2} - a_{i-2} = w$,

由 $(b_{i-2} - a_{i-2}) + (c_{i-2} - b_{i-2}) = c_{i-2} - a_{i-2}$, 得 $2w = w$,

所以 $w = 0$, 即 $a_{i-1} = b_{i-1} = c_{i-1} = 0$.

以此类推, 可得 $a_{i-2} = b_{i-2} = c_{i-2} = 0, a_{i-3} = b_{i-3} = c_{i-3} = 0, \dots, a_1 = b_1 = c_1 = 0, a_0 = b_0 = c_0 = 0$,

这与 a_0, b_0, c_0 三个数互不相等矛盾,

所以对于任意的 $i \in \mathbf{N}$, a_i, b_i, c_i 三个数中至多有一个数为 0. 8 分

(III) 设 a_i, b_i, c_i 三个数中最大的为 m_i , 记作 $m_i = \max\{a_i, b_i, c_i\}$.

因为 $a_{i+1} = |a_i - b_i|$, $b_{i+1} = |b_i - c_i|$, $c_{i+1} = |c_i - a_i|$, 且 $a_i, b_i, c_i \in \mathbf{N}$,

所以 $m_{i+1} \leq m_i$, 其中 $i=0, 1, 2, 3, \dots$,

由题意, 可知 $m_i \in \mathbf{N}$, 其中 $i=0, 1, 2, 3, \dots$

所以 m_1, m_2, m_3, \dots 不可能单调递减, 即必存在某个 $k \in \mathbf{N}^*$, 使得 $m_{k+1} = m_k$.

..... 10分

根据 X_{k+1} 的定义, 可得向量 $X_k = (a_k, b_k, c_k)$ 中的三个数 a_k, b_k, c_k 中必有 0.

由 (II) 知 a_k, b_k, c_k 中有且仅有一个为 0, 不妨设 $a_k = 0$,

(1) 若 $b_k \neq c_k$, 由题意, 不妨设 $0 < b_k < c_k$,

则 $a_{k+1} = |a_k - b_k| = b_k$, $b_{k+1} = |b_k - c_k| = c_k - b_k$, $c_{k+1} = |c_k - a_k| = c_k$, $m_{k+1} = m_k = c_k$

所以 $a_{k+2} = |a_{k+1} - b_{k+1}| < \max\{b_k, c_k - b_k\} < m_{k+1}$, 同理 $b_{k+2} < m_{k+1}$, $c_{k+2} < m_{k+1}$,

所以 $m_{k+2} < m_{k+1}$.

又因为 $m_i \in \mathbf{N}$,

所以此种情形不可能一直出现 (至多出现 m_{k+1} 次).

所以一定能找到某个 $j \in \mathbf{N}^*$, 使得 $b_j = c_j$ 12分

(2) 若 $b_k = c_k$, 由题意,

得 $X_k = (0, b_k, b_k)$, $X_{k+1} = (b_k, 0, b_k)$, $X_{k+2} = (b_k, b_k, 0)$, $X_{k+3} = (0, b_k, b_k)$, ...

所以存在正整数 $t = k$, 使得 $X_t = X_{t+3}$.

综上, 存在正整数 t , 使得 $X_t = X_{t+3}$ 13分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注