

2024 届新高三第一次大联考

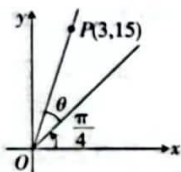
数 学

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $M = \{-3, -2, -1, 4, 5\}$, $N = \{x | x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $[-1, 4]$ B. $\{-1, 4\}$ C. $\{-3, -2, -1\}$ D. $\{-3, -2, 5\}$
- 若复数 z 满足 $\frac{(1-i)z}{i} = 2i - 3$, 则 z 的虚部为
 A. $-\frac{5}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{2}i$
- 已知直线 l 是曲线 $f(x) = 2x - \cos x + 2$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线, 则直线 l 在 x 轴上的截距为
 A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 3
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 锐角 θ 的大小如图所示, 则 $\frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta - 3\sin^2\theta} =$



- A. -2 B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. 3
- 光岳楼位于山东聊城古城中央, 主体结构建于明洪武七年(1374 年), 它是迄今为止全国现存古代建筑中最古老、最雄伟的木构楼阁之一, 享有“虽黄鹤、岳阳亦当望拜”之誉。光岳楼的墩台为砖石砌成的正四棱台, 如图所示, 该墩台上底面边长约为 32 m, 下底面边长约为 34.5 m, 高约为 9 m, 则该墩台的斜高约为 (参考数据: $\sqrt{1321} \approx 36.35$)



- A. 9.1 m B. 10.9 m C. 11.2 m D. 12.1 m
- 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n a_{n+1} = (\sin \alpha)^n$ ($0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), 且数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 则下列结论错误的是
- A. 若 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 则 $T_{100} = 1$ B. 若 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 则 $a_9 = \frac{a_1}{16}$
- C. 存在 α 及正整数 k , 使得 $a_{2k+1} > a_{2k-1}$ D. 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $a_1 = \sqrt[4]{\sin \alpha}$

- 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且对任意的 $0 < m < n$, 都有 $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} < 0$, 且 $f(4) = 0$, 则不等式 $\frac{f(-x-2) - f(x+2)}{x} > 0$ 的解集为

- A. $(-6, 0)$ B. $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$
 C. $(-\infty, -6) \cup (0, 2)$ D. $(-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

- 已知 $a = \ln 1.2, b = e^{0.2} - 1, c = \frac{1}{6}$, 则

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

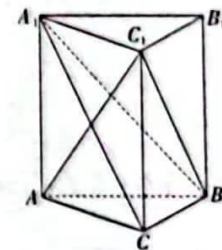
- 已知 $a < b < 0 < c < d$, 则下列不等式一定正确的是

- A. $a + b < c + d$ B. $ac < bc$ C. $ab < cd$ D. $\frac{a}{c} < \frac{a}{d}$

- 为庆祝江西籍航天员邓清明顺利从太空返航, 邓清明家乡的某所中学举办了一场“我爱星辰大海”航天知识竞赛, 满分 100 分, 该校高一(1)班代表队 6 位参赛学生的成绩(单位: 分)分别为: 84, 100, 91, 95, 95, 98, 则关于这 6 位参赛学生的成绩, 下列说法正确的是

- A. 众数为 95 B. 中位数为 93
 C. 平均成绩超过 93 分 D. 25% 分位数是 91

- 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = AC = BC = 1, AC \perp BC$, 则



- A. $A_1B_1 \parallel$ 平面 ABC_1
 B. 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABC_1
 C. 异面直线 AC 与 A_1B 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 D. 点 A_1, A, B, C 均在半径为 $\sqrt{3}$ 的球面上

- 加斯帕尔·蒙日(图 1)是 18-19 世纪法国著名的几何学家, 他在研究圆锥曲线时发现: 与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆, 我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆(图 2)。已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P, Q 均在 C 的蒙日圆 O 上, PA, PB 分别与 C 相切于 A, B , 则下列说法正确的是



图 1

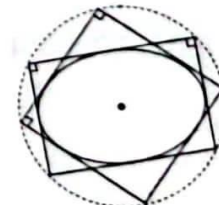


图 2

- A. C 的蒙日圆方程是 $x^2 + y^2 = 4$
 B. 设 $N(1, 1)$, 则 $|AN| + |AF_2|$ 的取值范围为 $[4 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{5}]$
 C. 若点 P 在第一象限的角平分线上, 则直线 AB 的方程为 $3\sqrt{14}x + 4\sqrt{14}y - 24 = 0$
 D. 若直线 PQ 过原点 O , 且与 C 的一个交点为 G , $|GF_1| \cdot |GF_2| = 3$, 则 $|GP| \cdot |GQ| = 4$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知直角三角形 OAB 的斜边为 AB , 向量 $\vec{OA} = (1, 2)$, $\vec{OB} = (m, 1)$, 则实数 $m =$ _____.

14. 已知双曲线 C 的中心为原点, 焦点在 x 轴上, 焦距为 8, 且 C 的离心率与它的一条渐近线的斜率之比恰好为 2, 则 C 的标准方程为 _____.

15. 唐宋八大家, 又称唐宋散文八大家, 是中国唐代韩愈、柳宗元, 宋代苏洵、苏轼、苏辙、王安石、曾巩、欧阳修八位散文家的合称, 其中江西独占三家, 分别是: 王安石、曾巩、欧阳修, 他们掀起的古文革新浪潮, 使诗文发展的陈旧面貌焕然一新. 为弘扬中国传统文化, 某校决定从唐宋八大家中挑选五位, 于某周末开展他们的散文赏析课, 五位散文家的散文赏析课各安排一节, 连排五节. 若在来自江西的三位散文家中至少选出两人, 且他们的散文赏析课互不相邻, 则不同的排课方法共有 _____ 种. (用数字作答)

16. 将函数 $g(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6\omega}$ 个单位长度可以得到函数 $f(x)$ 的图象, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ 内有零点, 无最值, 则 ω 的取值范围是 _____.

四、解答题: 本题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分) 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_2 + a_3 = 8$, $S_5 = 25$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = (-1)^n S_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 30 项的和 T_{30} .

18. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\sqrt{3}c \sin A \sin B = a \sin C + a \sin C \cos B$.

(1) 求 B 的大小;

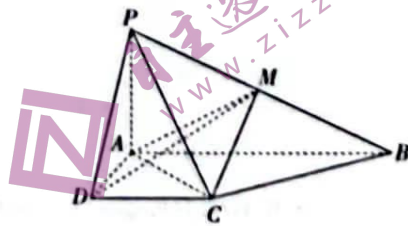
(2) 若角 B 的平分线交 AC 于点 D , $a = 3$, $BD = \sqrt{3}$, 求 c .

19. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AB \parallel CD$, $PA = AD = CD = 1$, $AB = 2$,

点 M 是 PB 的中点.

(1) 证明: $PB = 2CM$;

(2) 求直线 DM 与平面 ACM 所成的角的正弦值.



20. (12分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 顶点为坐标原点 O , 过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 当点 O 到直线 l 的距离最大时, $AB = 4$.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于点 D , 记线段 BD 的中点为 P , 且 $\triangle OAF$ 与 $\triangle OPF$ 的面积之和为 S , 求 S 的最小值.

21. (12分) 近年来, 随着智能手机的普及, 网络购物、直播带货、网上买菜等新业态迅速进入了我们的生活, 改变了我们的生活方式. 现将一周网上买菜次数超过 3 次的市民认定为“喜欢网上买菜”, 不超过 3 次甚至从不在网上买菜的市民认定为“不喜欢网上买菜”. 某市 M 社区为了解该社区市民网上买菜情况, 随机抽取了该社区 100 名市民, 得到的统计数据如下表所示:

	喜欢网上买菜	不喜欢网上买菜	合计
年龄不超过 45 岁的市民	40	10	50
年龄超过 45 岁的市民	20	30	50
合计	60	40	100

(1) 是否有 99.9% 的把握认为 M 社区的市民是否喜欢网上买菜与年龄有关?

(2) M 社区的市民张无忌周一、二均在网买菜, 且周一从 A, B 两个买菜平台随机选择其中一个下单买菜. 如果周一选择 A 平台买菜, 那么周二选择 A 平台买菜的概率为 $\frac{4}{5}$; 如果周一选择 B 平台买菜, 那么周二选择 A 平台买菜的概率为 $\frac{1}{3}$, 求张无忌周二选择 B 平台买菜的概率;

(3) 用频率估计概率, 现从 M 社区市民中随机抽取 20 名市民, 记其中喜欢网上买菜的市民人数为 X , 事件“ $X = k$ ”的概率为 $P(X = k)$, 求使 $P(X = k)$ 取得最大值的 k 的值.

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

$P(\chi^2 \geq k_0)$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

22. (12分) 已知函数 $f(x) = a \ln(x+1) - ax$.

(1) 当 $a \neq 0$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x > -1$ 时 $f(x) > \frac{ax - e^{x+1} + a}{x+1}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.