

高三阶段性抽测一

数学

2023. 10

注意事项

学生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求:

1. 本卷共4页,包含单项选择题(第1题~第8题)、多项选择题(第9题~第12题)、填空题(第13题~第16题)、解答题(第17题~第22题).本卷满分150分,答题时间为120分钟.答题结束后,请将答题卷交回.
2. 答题前,请您务必将自己的姓名、调研序列号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卷的规定位置.
3. 请在答题卷上按照顺序在对应的答题区域内作答,在其他位置作答一律无效.作答必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔.请注意字体工整,笔迹清楚.
4. 请保持答题卷卷面清洁,不要折叠、破损.一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔.

一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共计40分.每小题给出的四个选项中,只有一个选项是正确的.请把正确的选项填涂在答题卷相应的位置上.

1. 已知幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$,则 $f(8) =$

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\sqrt{2}$

2. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{\ln x}$ 的定义域为

- A. $(1, 2]$ B. $(1, 3]$ C. $(0, 1) \cup (1, 3]$ D. $(0, 1) \cup (1, 2]$

3. 已知锐角 α, β 满足 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{12}{13}$,则 $\cos \beta$ 的值为

- A. $\frac{16}{65}$ B. $-\frac{16}{65}$ C. $\frac{33}{65}$ D. $-\frac{33}{65}$

4. 权方和不等式作为基本不等式的一个变化,在求二元变量最值时有很广泛的应用,其表述如下:设 $a, b, x, y > 0$,则 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$,当且仅当 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ 时等号成立.根据权方和不等式,

函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-4x}$ ($0 < x < \frac{1}{4}$)的最小值为

- A. 1 B. 4 C. 9 D. 16

5. 已知函数 $f(x) = (e^x - e^{-x}) \cos x + 2$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值和最小值分别为 M, N ,则 $M + N =$

- A. -2 B. 0 C. 2 D. 4

6. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $\cos \angle ACB = -\frac{1}{2}$, 边 AB 上的角平分线 CD 的长度为 t , 且 $AD = 2BD$, 则 $\frac{c}{t} =$

- A. $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. $\frac{3}{2}$ 或 3

7. 已知奇函数 $f(x)$ ($x \neq 0$) 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(-2) = 0$. 当 $x > 0$ 时, $3f(x) > xf'(x)$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围为

- A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ |\log_{\frac{1}{2}} x|, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = 2[f(x)]^2 - mf(x) + 1$, 若 $m \in (2\sqrt{2}, 3)$, 则 $g(x)$ 零点的个数为

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 每小题给出的四个选项中, 都有多个选项是正确的, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 选错或不答的得 0 分. 请把正确的选项填涂在答题卷相应的位置上.

9. 已知实数 x, y 满足 $4x^2 - 4xy + 4y^2 = 1$, 则 $x - 2y$ 的可能取值是

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) - \sqrt{3} \cos(\omega x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的相邻两条对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(\frac{\pi}{3})$ 恒成立, 则下列结论正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 图象可由 $y = 2\sin x$, 纵坐标不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到
B. 函数 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称
C. 函数 $f(x), x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的值域为 $[-1, 2]$
D. 直线 $4x - y - \frac{\pi}{3} = 0$ 是函数 $f(x)$ 的一条切线

11. 若定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x+1)$ 是偶函数, $f(x-1)$ 是奇函数, 则下列命题正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称 B. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4
C. $f(2023) = 0$ D. 对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) + f(2-x) = 0$

12. 已知函数 $f(x) = (e^x + 1)x - a(e^x - 1)$, 则

- A. 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = x$
B. 当 $a \leq 2$ 时, $f(x)$ 单调递增
C. 当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 有两个极值点
D. 若 $f(x) = 0$ 有三个不相等的实根 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 > 0$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。请把答案填写在答题卷相应位置上。

13. 已知函数 $y = \ln x + \frac{a}{x}$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知 $\sin(\frac{\pi}{6} + \alpha) = \frac{1}{3}$ ，则 $\sin(\frac{5}{6}\pi + 2\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x - 3a + 1, & x \leq 1 \\ \log_a x - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$ ，且对于 $\forall x_1 \neq x_2$ ，恒有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ，则实数 a

的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 已知函数 $f(x) = m \ln(x+1) - 2$ ，若 $f(x) > (m+2)x - 2e^x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

四、解答题：本大题共 6 小题，共计 70 分。请在答题卷指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分) 命题 p : 函数 $f(x) = (a-2m)^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减，命题 q : $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 + 2ax - 4 < 0$ 恒成立。

(1) 若命题 q 为真命题，求实数 a 的取值范围；

(2) 若命题 p 为真命题是 q 为真命题成立的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围。

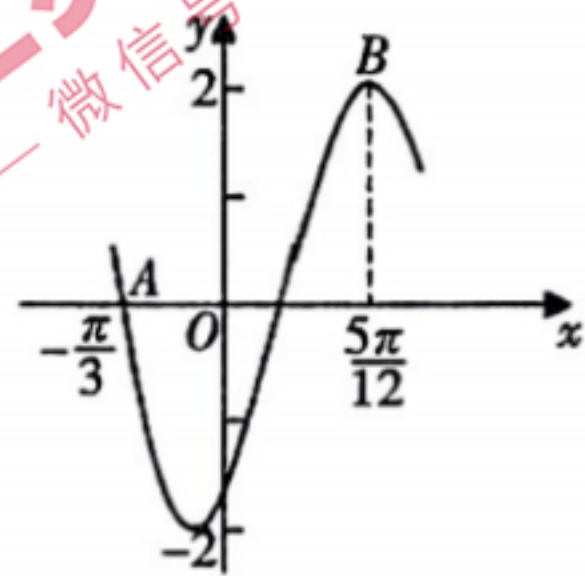
18. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbf{R}$) 的部分函数图象如图所示。

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象上所有点纵坐标不变，横坐标变为原来

的 $\frac{1}{t}$ ($t > 0$) 倍，得到 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上

单调递增，求实数 t 的取值范围。



19. (本小题满分 12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对应边分别为 a, b, c 。请从下面三个条件中任选一个作为已知条件并解答：① $c = \sqrt{3} a \sin C - c \cos A$ ，② $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 C - \sin B \sin C$ ，

③ $\tan B + \tan C - \sqrt{3} \tan B \tan C = -\sqrt{3}$ 。

(1) 求 A 的大小；

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形， $a = \sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围。

20. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$, $g(x) = \ln x - ax + e$, 其中 e 是自然常数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 对 $\forall x_1 \in [-1, 0]$, 总存在 $x_2 \in [2, e^2]$, 使 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分) 国庆期间, 某小区为了增添节日氛围, 决定对小区的健身步道进行装饰.

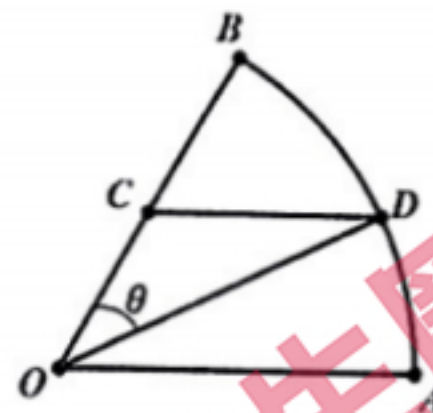
如图是一个半径为 1 百米, 圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形区域, 点 C 是半径 OB 上的一点, 点 D 是

圆弧 \widehat{AB} 上一点, 且 $CD \parallel OA$. 现决定在线段 CD 、圆弧 \widehat{BD} 的一侧铺设灯带, 线段 OC 的两侧铺

设灯带, 且每百米 a 元. 设 $\angle BOD = \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$, 灯带的总费用 y 元.

(1) 求 y 关于 θ 的函数解析式;

(2) 当 θ 为何值时, 灯带费用 y 最大, 并求出费用 y 的最大值.



22. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - mx$, 其中 e 是自然常数.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq (a - m)x - \sin x + 1$, 对 $\forall x > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.