**绝密★启用并使用完毕前**

# 山东省实验中学2024届高三第一次诊断考试

## 数学试题 2023.10

**注意事项：**

**1．答卷前，先将自己的考生号等信息填写在试卷和答题纸上，并在答题纸规定位置贴条形码.**

**2．本试卷满分150分，分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷为第1页至第2页，第Ⅱ卷为第3页至第4页.**

**3．选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.**

**4．非选择题的作答：用0.5mm黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.**

**第Ⅰ卷**

**一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合 $A=\{x|2^x<4\}$，$B=\{x|\sqrt{x-1}\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $(0,2)$　　B. $[1,2)$　　C. $[1,2]$　　D. $(0,1)$

2. 已知复数 $z$ 满足 $\mathrm{i}z=2-\mathrm{i}$，其中 $\mathrm{i}$ 为虚数单位，则 $\bar{z}$ 为（　）

A. $-1-2\mathrm{i}$　　B. $1+2\mathrm{i}$　　C. $-1+2\mathrm{i}$　　D. $1-2\mathrm{i}$

3. “$b\in(0,4)$”是“$\forall x\in\mathrm{R}$，$bx^2-bx+1>0$ 成立”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 设随机变量 $X$，$Y$ 满足：$Y=3X-1$，$X\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right)$，则 $D(Y)=$（　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

5. 设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，若 $a_2+a_3+a_4=2$，$a_3+a_4+a_5=4$，则数列 $\{a_n\}$ 的前6项和为（　）

A. 18　　B. 16　　C. 9　　D. 7

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, x<0\\(a-2)x+3a, x\ge 0\end{cases}$ 满足对任意 $x_1\ne x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，则 $a$ 的取

值范围是（　）

A. $(0,1)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $\left(0,\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{3}{4},2\right)$

7. 已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(1+x)$ 为偶函数，则（　）

A. $f(-2-x)+f(x)=0$　　B. $f(-x)=f(1+x)$

C. $f(x+2)=f(x-2)$　　D. $f(2023)=0$

8. 已知 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 均为单位向量，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\ge 0$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\ge 0$，$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $3x+y$ 的最小值为（　）

A. $-\frac{3\sqrt{21}}{14}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{7}}{14}$　　D. -1

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．**

9. 下列说法正确的是（　）

A. 在研究成对数据的相关关系时，线性相关关系越强，相关系数 $|r|$ 越接近于 1

B. 样本数据：27，30，37，39，40，50 的第 30 百分位数与第 50 百分位数之和为 68

C. 已知随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若 $P(X\ge -1)+P(X\ge 5)=1$，则 $\mu=2$

D. 将总体划分为 2 层，通过分层随机抽样，得到两层的样本平均数和样本方差分别为 $\overline{x_1},\overline{x_2}$ 和 $s_1^2$，$s_2^2$，若 $\overline{x_1}=\overline{x_2}$，则总体方差 $s^2=\frac{1}{2}(s_1^2+s_2^2)$

10. 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则（　）

A. $a^2<b^2$　　B. $ab<b^2$　　C. $\ln(-a)>\ln(-b)$　　D. $|a|+|b|>|a+b|$

11. 已知函数 $f(x)=\sin x-\frac{1}{\sin x}$，则（　）

A. $y=f(x)$ 的图象关于原点对称　　B. $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$

C. $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称　　D. $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

12. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，将函数 $y=f(x)$ 的图象绕坐标原点逆时针旋转 $\alpha(0^\circ<\alpha\le 90^\circ)$ 后，所得曲线仍然是某个函数的图象，则称 $f(x)$ 为“$\alpha$ 旋转函数”，则（　）

A. 存在"90°旋转函数"

B. "70°旋转函数"一定是"80°旋转函数"

C. 若 $g(x)=ax+\frac{1}{x}$ 为"45°旋转函数"，则 $a=1$

D. 若 $h(x)=\frac{bx}{e^x}$ 为"45°旋转函数"，则 $-e^2\leqslant b\leqslant 0$

## 第Ⅱ卷

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$，则 $\sin 2\theta=$______.

14. 已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，若 $\vec{c}=2\vec{a}+\sqrt{5}\vec{b}$，则 $\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=$______.

15. 二项式 $(5+x)^{2023}$ 展开式的各项系数之和被 7 除所得余数为______.

16. 若函数 $f(x)=2\sin(\omega\cos x)-1$ 在区间 $(0,2\pi)$ 恰有 2 个零点，则 $\omega$ 的取值范围是______.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $A=120°$，$b=1$，$c=2$.

（1）求 $\sin B$；

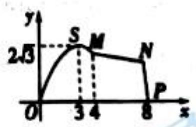
（2）若 $D$ 为 $BC$ 上一点，且 $\angle BAD=90°$，求 $\triangle ADC$ 的面积.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $S_n=n^2+n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\begin{cases}a_n, n为奇数\\ 2^{\frac{a_n}{2}}, n为偶数\end{cases}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $T_{2n}$.

19. 如图，某公园拟在长为 8（百米）的道路 $OP$ 的一侧修建一条运动跑道，跑道的前一部分为曲线段 $OSM$，该曲线段为函数 $y=A\sin\omega x(A>0,\omega>0)$，$x\in[0,4]$ 的图象，且图象的最高点为 $S(3,2\sqrt{3})$，跑道的后一部分为折线段 $MNP$. 为保证跑步人员的安全，限定 $\angle MNP=120°$.




（1）求 $A$，$\omega$；

（2）求折线段跑道 $MNP$ 长度的最大值.

20. 已知 $f(x)$、$g(x)$ 分别为定义域为R的偶函数和奇函数，且 $f(x)+g(x)=e^{x}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）对任意实数 $x$ 均有 $3+g^{2}(x)-af(x)\geq 0$ 成立，求实数 $a$ 的取值范围.

21. 某品牌女装专卖店设计摸球抽奖促销活动，每位顾客只用一个会员号登陆，每次消费都有一次随机摸球的机会．已知顾客第一次摸球抽中奖品的概率为 $\frac{2}{7}$；从第二次摸球开始，若前一次没抽中奖品，则这次抽中的概率为 $\frac{1}{2}$，若前一次抽中奖品，则这次抽中的概率为 $\frac{1}{3}$．记该顾客第 $n$ 次摸球抽中奖品的概率为 $P_n$.

（1）求 $P_2$ 的值，并探究数列 $\{P_n\}$ 的通项公式；

（2）求该顾客第几次摸球抽中奖品的概率最大，请给出证明过程.

22. 已知函数 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x$ 的最小值为1.

（1）求 $a$；

（2）若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1\in(0,1)$，且 $x_{n+1}=f(x_n)$，证明：$x_{n+1}+x_{n+3}>2x_{n+2}$.

# 关于我们

**齐鲁家长圈**系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。


打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索