

2022—2023 学年度第二学期高三年级质量监测（一）

数学学科试卷

2023.03

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

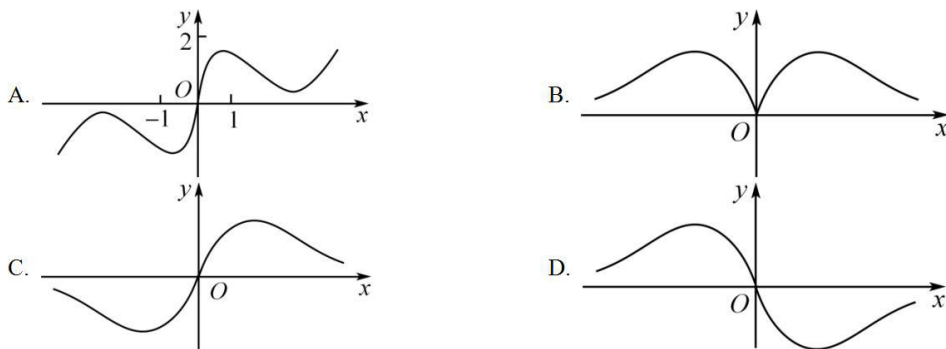
1. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ ，集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$ ，则  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$  ( )

- A.  $\{1, 2\}$                       B.  $\{3, 4, 5\}$                       C.  $\{2, 3, 4, 5\}$                       D.  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. 设  $a \in \mathbf{R}$ ，则“ $a(a-3) > 0$ ”是“ $a > 3$ ”的( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                              D. 既不充分也不必要条件

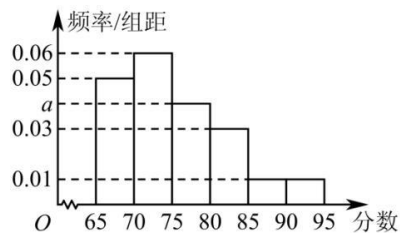
3. 函数  $y = (2x - \sin x) \cdot 2^{-|x|}$  的图象可能是 ( )



4. 某高中随机选取 100 名学生一次数学统测测试成绩，分为 6 组：

$[65, 70), [70, 75), [75, 80), [80, 85), [85, 90), [90, 95]$ ，绘制了频率分布直方图如图所示，则成绩在区间

$[70, 85)$  内的学生有 ( )



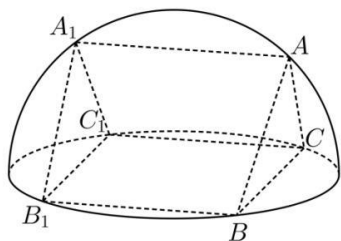
- A. 35 名                      B. 50 名                      C. 60 名                      D. 65 名

5. 已知直线  $y = kx - 1$  与圆  $x^2 + (y - 1)^2 = 16$  相交于  $A, B$  两点，则  $AB$  的长度可能为 ( )

- A. 6                              B. 7                              C. 12                              D. 14



底面圆的内接正方形，则直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的体积为\_\_\_\_\_.



14. 假设某市场供应的灯泡中，甲厂产品占 60%，乙厂产品占 40%，甲厂产品的合格率为 90%，乙厂产品的合格率为 80%，在该市场中购买甲厂的两个灯泡，则恰有一个是合格品的概率为\_\_\_\_\_；若在该市场中随机购买一个灯泡，则这个灯泡是合格品的概率为\_\_\_\_\_.

15. 在平面四边形  $ABCD$  中， $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 1, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$ ，则  $|\overrightarrow{AC}| =$ \_\_\_\_\_；  
 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} =$ \_\_\_\_\_.

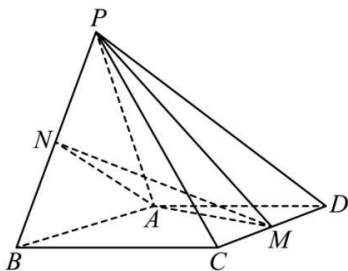
三、解答题：（本大题共 5 个小题，共 75 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，且  $4a = \sqrt{5}c, b = 11, \cos C = \frac{3}{5}$ .

- (1) 求  $\sin A$  的值；
- (2) 求  $a$  的值；
- (3) 求  $\cos(A - 2C)$  的值.

17. 如图，四棱锥  $P - ABCD$  中，平面  $PAB \perp$  平面

$ABCD, AB \parallel CD, AB \perp AD, AB = 3, AD = \sqrt{3}, AP = CD = 2, \angle PAB = 60^\circ, M$  是  $CD$  中点， $N$  是  $PB$  上一点.



- (1) 当  $PN = \frac{1}{3}PB$  时，
  - (i) 证明： $MN \parallel$  平面  $PAD$ ；
  - (ii) 求直线  $PM$  与平面  $PAD$  所成角的正弦值；

(2) 平面  $PAD$  与平面  $AMN$  夹角的余弦值为  $\frac{4}{5}$ , 求  $\frac{PN}{PB}$  的值.

18. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点, 过  $F_2(1, 0)$  的直线  $l$  交  $C$  于  $P, Q$  两点, 当  $l$  垂直于  $x$  轴时, 且  $\triangle PF_1F_2$  的面积是  $\frac{3}{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 设椭圆  $C$  的左顶点为  $A$ , 当  $l$  不与  $x$  轴重合时, 直线  $AP$  交直线  $m: x = 2a$  于点  $M$ , 若直线  $m$  上存在另一点  $N$ , 使  $\overrightarrow{F_2M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$ , 求证:  $A, Q, N$  三点共线.

19. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的首项为 1, 前  $n$  项和为  $S_n$ , 单调递增的等比数列  $\{b_n\}$  的首项为 2, 且满足

$$b_2 + S_2 = 7, b_3 + S_3 = 14.$$

(1) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 证明:  $3S_n = a_n S_{n+1} - (a_n - 1)S_n (n \in \mathbb{N}^*)$ ;

(3) 记  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 证明:  $\sum_{i=1}^n \frac{T_i S_i}{b_i} < \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ .

20. 已知函数  $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 2a \ln x (a \in \mathbb{R})$ .

(1) 当  $a = 2$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(2) 若函数  $f(x)$  有极大值, 试确定  $a$  的取值范围;

(3) 若存在  $x_0$  使得  $f(x_0) + (\ln x_0 - 2a)^2 \leq \frac{3}{4} x_0^2 - \left(\frac{3}{2} a + 2\right) x_0 + \frac{11}{4} a^2 + \frac{1}{5}$  成立, 求  $a$  的值.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线



自主选拔在线  
微信号：zizzsw



自主选拔在线  
微信号：zizzsw



自主选拔在线  
微信号：zizzsw