2023年普通高等学校招生全国统一考试(模拟)

数学试题参考答案及评分标准

2023.5

说明:

一、本解答只给出了一种解法供参考,如考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容参照评分标准酌情赋分.

二、当考生的解答在某一步出错误时,如果后继部分的解答未改该题的内容与难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确答案应得分数一半;如果后继部分的解答有较严重的错误或又出现错误,就不再给分.

三、解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数,选择题和填空题不给中间分.

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.A 2.D 3.A 4.B 5.C 6.C 7.B 8.D

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9.BCD 10.BD 11.ACD 12.BC

三、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13.240 14.3 15.320 16.4 3

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.解:(1)当$n=1$时,$S_1=2a_1-1$,得$a_1=1$. ………… 1分

$\because S_n=2a_n-1$,

$\therefore S_{n-1}=2a_{n-1}-1(n\geq 2)$,

两式相减得$S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$,即$a_n=2a_n-2a_{n-1}$, ………… 2分

化简得$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geq 2)$, ………… 3分

$\therefore \{a_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列, ………… 4分

$\therefore a_n=2^{n-1}$. ………… 5分

(2)若选条件①,则$b_n=(2n-1)\cdot 2^{n-1}$,

$\therefore T_n=1\times 2^0+3\times 2^1+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}$, ………… 6分

$2T_n=1\times 2^1+\cdots+(2n-3)2^{n-1}+(2n-1)\cdot 2^n$, ………… 7分

$\therefore -T_n=1+2\times(2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n-1)\cdot 2^n$ ………… 8分

$=1+2\times\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot 2^n$

齐鲁家长圈 微信号: sdgkjzq

$=(3-2n)\cdot 2^n-3$, …………………………………………………………………………… 9 分

$\therefore T_n=(2n-3)\cdot 2^n+3$. …………………………………………………………………… 10 分

若选②，则 $b_n=\dfrac{1}{(2n+1)\log_2 2^{2n-1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，…………… 7 分

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\times[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})]$ ………………………… 8 分

$=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{2n+1})$

$=\dfrac{n}{2n+1}$. …………………………………………………………………………………… 10 分

18. 证明：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由 $b=\dfrac{c}{1+2\cos A}$ 得，$c=b+2b\cos A$，…………………………… 1 分

由正弦定理得：$\sin C=\sin B+2\sin B\cos A$，……………………………………………………… 2 分

又 $\because A=\pi-(B+C)$，

$\therefore \sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，…………………………… 3 分

$\therefore \sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin B+2\sin B\cos A$，即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin B$，

$\therefore \sin(A-B)=\sin B$，…………………………………………………………………… 4 分

$\because 0<\sin B=\sin(A-B)$，

$\therefore 0<A-B<A<\pi$，…………………………………………………………………………… 5 分

$\because B+(A-B)=A<\pi$，$\therefore B=A-B$，即 $A=2B$；……………………………………………… 6 分

(2) 解：由 $\begin{cases}0<A=2B<\pi\\0<C<\pi\end{cases}$，得 $0<B<\dfrac{\pi}{3}$，…………………………………………… 7 分

$\therefore \dfrac{1}{2}<\cos B<1$，…………………………………………………………………………… 8 分

由 $b=1$ 及正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $a=\dfrac{\sin A}{\sin B}$，$c=\dfrac{\sin C}{\sin B}$，…………………… 9 分

$\therefore a+c=\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin 2B+\sin(\pi-3B)}{\sin B}=\dfrac{\sin 2B+\sin 3B}{\sin B}$

$=\dfrac{2\sin B\cos B+3\sin B\cos^2 B-\sin^3 B}{\sin B}=2\cos B+3\cos^2 B-\sin^2 B$

$=4\cos^2 B+2\cos B-1=4(\cos B+\dfrac{1}{4})^2-\dfrac{5}{4}$，…………………………………………… 11 分

$\because \dfrac{1}{2}<\cos B<1$，

$\therefore 1<4(\cos B+\dfrac{1}{4})^2-\dfrac{5}{4}<5$，即 $1<a+c<5$，

即 $a+c$ 的取值范围为 $(1,5)$. ………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1) 如图 1，连接 BD 与 CE 交于点 Q，连接 PQ，

$\because DE/\!/BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC$，

$\therefore \dfrac{DQ}{BQ}=\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{2}$，…………………………………………………………………… 1 分

又 $\because AP=2PD$，$\therefore \dfrac{DP}{PA}=\dfrac{DQ}{QB}=\dfrac{1}{2}$，……………………………………………………… 2 分

$\therefore AB /\!/ PQ$, …………………………………………………………………………………………… 3 分

$\because PQ \subset$ 平面 PEC, $AB \not\subset$ 平面 PEC,

$\therefore AB /\!/$ 平面 PEC. ……………………………………………………………………………… 4 分

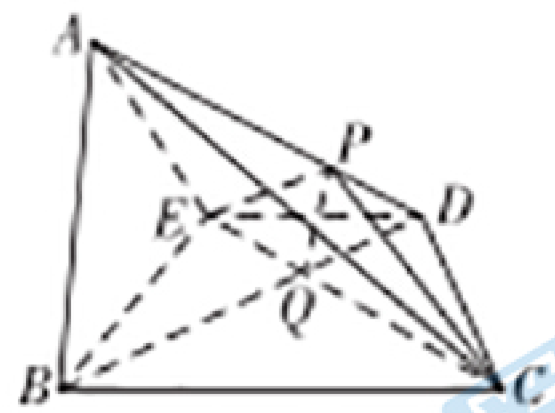

图1

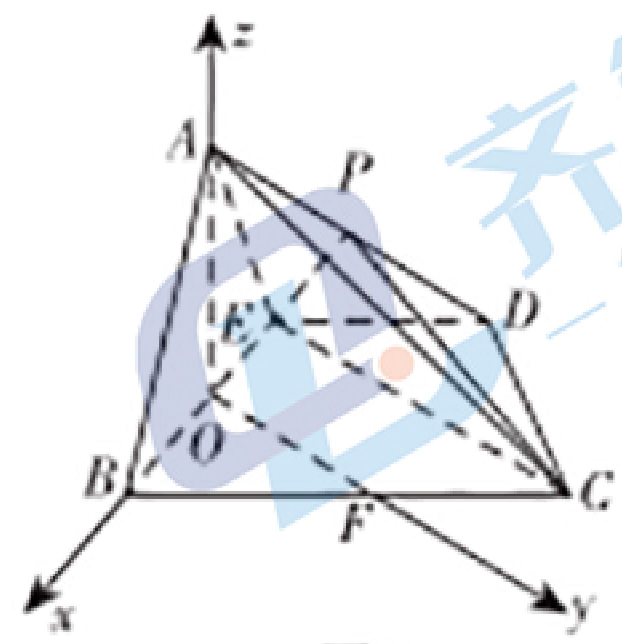

图2

(2)设 BE 中点为 O,作 $OF /\!/ EC$ 交 BC 于 F,

$\because \angle A=60°, ED=DC=2, \angle D=120°$,

$\therefore \angle BEC=90°$,

$\therefore OF \perp BE$. …………………………………………………………………………………………… 5 分

以 OB, OF, OA 分别为 x, y, z 轴建空间直角坐标系,如图 2.

则 $B(1,0,0), A(0,0,\sqrt{3}), E(-1,0,0), C(-1,2\sqrt{3},0), F(0,\sqrt{3},0)$, ……………… 6 分

$\therefore \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{BF}=(-1,0,0)+(0,\sqrt{3},0)-(1,0,0)=(-2,\sqrt{3},0)$,

$\therefore D(-2,\sqrt{3},0)$,

$\overrightarrow{EC}=(0,2\sqrt{3},0), \overrightarrow{EA}=(1,0,\sqrt{3})$, …………………………………………………… 7 分

设平面 AEC 法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}2\sqrt{3}y_1=0\\ x_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$,令 $z_1=1$,得 $x_1=-\sqrt{3}$,

$\therefore \boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},0,1)$, ……………………………………………………………………… 8 分

设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$, $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AP}=(1,0,\sqrt{3})+\lambda(-2,\sqrt{3},-\sqrt{3})$,

$\therefore \overrightarrow{EP}=(1-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$, ………………………………………………… 9 分

设平面 PEC 法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}2\sqrt{3}y_2=0\\ (1-2\lambda)x_2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z_2=0\end{cases}$,

取 $x_2=\sqrt{3}(\lambda-1)$,则 $z_2=1-2\lambda$,

$\therefore \boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3}(\lambda-1),0,1-2\lambda)$, ……………………………………………………… 10 分

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\left|\dfrac{-3(\lambda-1)+(1-2\lambda)}{2\cdot\sqrt{3(\lambda-1)^2+(1-2\lambda)^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ………………………… 11 分

$\therefore \dfrac{|4-5\lambda|}{\sqrt{7\lambda^2-10\lambda+4}}=\sqrt{3}$,

$\therefore 2\lambda^2-5\lambda+2=0$,

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 或 $\lambda=2$(舍去).

当 $\lambda=\frac{1}{2}$时，此时 P 为 AD 中点，平面 AEC 与平面 PEC 夹角为 $30°$. ………… 12 分

20. 解：(1) 假设为 H_0：感染甲流病毒与接种流感疫苗无关，

由列联表可知χ^2 的观测值

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200\times(90\times30-10\times70)^2}{100\times100\times160\times40}=12.5>10.828=x_{0.001},$$ …… 2 分

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为感染甲流病毒与接种流感疫苗有关. ………… 3 分

(2) 由题意得，该医院所有感冒症状中感染甲流病毒的概率为$\frac{30+10}{200}=\frac{1}{5}$， ……… 4 分

设随机抽取的 3 人中至多有 1 人感染甲流病毒为事件 A，

则 $P(A)=C_3^0(\frac{1}{5})^0(\frac{4}{5})^3+C_3^1(\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^2=\frac{112}{125}$； ………… 7 分

(3) $f(p)=(1-p)p+(1-p)^2p=p(1-p)(2-p)=p^3-3p^2+2p$， ………… 9 分

则 $f'(p)=3p^2-6p+2$， ………… 10 分

令 $f'(p)=0$，则 $p_1=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$，$p_2=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$（舍去）， ………… 11 分

随着 p 的变化，$f(p)$，$f'(p)$的变化如下表：

p	$(0,p_1)$	p_1	$(p_1,1)$
$f'(p)$	+	0	−
$f(p)$	递增	极大值	递减

综上，当 $p=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$时，$f(p)$最大. ………… 12 分

21. 解：(1) 由题意得 $|AF|=p+\frac{p}{2}=6$， ………… 1 分

$\therefore p=4$， ………… 2 分

$\therefore C$ 的方程为 $y^2=8x$. ………… 3 分

(2) 由(1)知 $F(2,0)$，设 l 的方程为 $x=my+2$，$(m\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y^2=8x\\x=my+2,\end{cases}$ 得 $y^2-8my-16=0$，

则 $y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-16$，

$\therefore x_1+x_2=my_1+2+my_2+2=m(y_1+y_2)+4=8m^2+4$， ………… 5 分

$\therefore AB$ 的中点为 $Q(4m^2+2,4m)$，

$|AB|=x_1+x_2+4=8m^2+8$. ………… 5 分

又直线 MN 的斜率为$-m$，

$\therefore$ 直线 MN 的方程为：$x=-\frac{1}{m}y+4m^2+6$，

将上式代入 $y^2=8x$，并整理得 $y^2+\frac{8}{m}y-16(2m^2+3)=0$， ………… 6 分

设 $M(x_3,y_3)$,$N(x_4,y_4)$,则 $y_3+y_4=-\dfrac{8}{m}$,$y_3y_4=-16(2m^2+3)$, ························ 7 分

则 $x_3+x_4=-\dfrac{1}{m}(y_3+y_4)+2(4m^2+6)=-\dfrac{1}{m}(-\dfrac{8}{m})+8m^2+12=\dfrac{8}{m^2}+8m^2+12$,

$\therefore$ MN 的中点为 $E(\dfrac{4}{m^2}+4m^2+6,-\dfrac{4}{m})$,

$|MN|=\sqrt{1+\dfrac{1}{m^2}}|y_3-y_4|=\dfrac{8(m^2+1)\sqrt{2m^2+1}}{m^2}$, ························ 9 分

由 MN 垂直平分 AB,又 $\angle AMB+\angle ANB=\pi$,

得 A,M,B,N 在以 MN 为直径的圆上,

即 E 为圆心,$|AE|=|BE|=\dfrac{1}{2}|MN|$, ························ 10 分

从而 $\dfrac{1}{4}|AB|^2+|EQ|^2=\dfrac{1}{4}|MN|^2$,

即 $\dfrac{1}{4}(8m^2+8)^2+(\dfrac{4}{m^2}+4)^2+(4m+\dfrac{4}{m})^2=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{64(m^2+1)^2(2m^2+1)}{m^4}$,

解得 $m=1$ 或 $m=-1$, ························ 11 分

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x-y-2=0$ 或 $x+y-2=0$. ························ 12 分

22.解:(1)令 $\varphi(x)=g(x)-f(x)=xe^x-ex+ex\ln x=x(e^x+e\ln x-e)(x>0)$, ············ 1 分

令 $m(x)=e^x+e\ln x-e(x>0)$,$m'(x)=e^x+\dfrac{e}{x}>0$,

则 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增,

又 $m(1)=0$,$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时,有 $m(x)<m(1)=0$,

$\therefore$ $e^x+e\ln x-e<0$,

$\therefore$ $xe^x+ex\ln x-ex<0$,即 $xe^x-ex<-ex\ln x$,

$\therefore$ $g(x)<f(x)$, ························ 2 分

当 $x\geqslant 1$ 时,$g(x)>f(x)$,

$\therefore$ $h(x)=\begin{cases}-ex\ln x(0<x<1)\\ xe^x-ex(x\geqslant 1)\end{cases}$ ························ 3 分

当 $0<x<1$ 时,$h(x)=-ex\ln x$,$h'(x)=-e\ln x-e=-e(\ln x+1)$

由 $h'(x)<0$,得 $x>\dfrac{1}{e}$,

$\therefore$ $h(x)$ 在 $(\dfrac{1}{e},1)$ 上单调递减. ························ 4 分

当 $x\geqslant 1$ 时,$h(x)=xe^x-ex$,$h'(x)=(1+x)e^x-e\geqslant 2e-e>0$,

$\therefore$ $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

故 $h(x)$ 的单调递减区间为 $(\dfrac{1}{e},1)$. ························ 5 分

(2)证明:由(1)知 $(0,\dfrac{1}{e})$ 是 $h(x)$ 的增区间,$(\dfrac{1}{e},1)$ 是 $h(x)$ 的减区间;$(1,+\infty)$ 是 $h(x)$ 的增区间,

$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to 0$，$h(\frac{1}{e})=1$，$h(1)=0$，

结合函数 $h(x)$ 的大致图象，

设 $h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=et\in(0,1)$，

$\because g'(x)=(x+1)e^x-e$，

$\therefore g'(1)=e$，而 $g(1)=0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程为：$y=e(x-1)$，…………………………………… 6 分

令 $k(x)=h(x)-e(x-1)=xe^x-2ex+e$，$x\in(1,+\infty)$，

$k'(x)=(x+1)e^x-2e>0$，则 $k(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，而 $k(1)=0$，

$\therefore k(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，即 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>e(x-1)$．……………… 7 分

设直线 $y=e(x-1)$ 与 $y=et$ 交点横坐标为 x'_3，则 $x'_3=1+t$，有 $x_3<x'_3$，

$\because -x_1\ln x_1=-x_2\ln x_2=t$，

$\therefore x_1\ln x_1=mx_1\ln(mx_1)$，

$\therefore \ln x_1=\ln(mx_1)^m$，

$\therefore x_1=(mx_1)^m$，可得 $x_1=m^{\frac{m}{1-m}}$，…………………………………………………… 8 分

$\therefore t=-x_1\ln x_1=-x_1(\frac{m}{1-m})\ln m$，又 $x_2=mx_1$，

$\therefore x_2+x_3<x_2+x'_3=x_2+1+t$

$=mx_1+1-x_1(\frac{m}{1-m})\ln m=x_1(m+\frac{m\ln m}{m-1})+1$ ……………………………………… 9 分

令 $\varphi(m)=m+\frac{m\ln m}{m-1}$，则 $\varphi'(m)=\frac{m(m-1)-\ln m}{(m-1)^2}$

令 $p(m)=m(m-1)-\ln m$，则 $p'(m)=2m-1-\frac{1}{m}=\frac{(2m+1)(m-1)}{m}$，

当 $m\in(1,e)$ 时，可得 $p'(m)>0$ 恒成立，$p(m)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增；

$\therefore p(m)>p(1)=0$，即 $\varphi'(m)>0$ 恒成立，$\varphi(m)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，………… 11 分

当 $m\in(1,e)$ 时，$\varphi(m)<\varphi(e)=e+\frac{e}{e-1}$，

$\therefore x_2+x_3<x_1(e+\frac{e}{e-1})+1=\frac{e^2}{e-1}x_1+1$

即 $x_2+x_3<\frac{e^2}{e-1}x_1+1$．………………………………………………………………… 12 分