2024届高三夏令营学习能力测试
数学试题（重点班）

一、**单选题**(本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．)

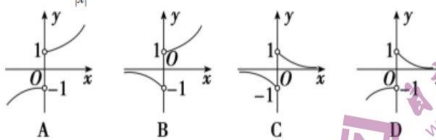
1．下面是关于复数 $z=1-\mathrm{i}$ 的四个命题，其中的真命题为 （　　）

A．$|z|=2$　　B．$z^2=2\mathrm{i}$　　C．z 的虚部为 $-\mathrm{i}$　　D．z 的共轭复数为 $1+\mathrm{i}$

2．全集为 R，集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\left\{x\middle|\frac{x+1}{x-2}<0\right\}$，则 $A\cap(C_R B)$ 真子集个数为（　　）

A．3　　B．4　　C．7　　D．8

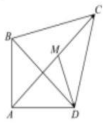
3．函数 $f(x)=\frac{x}{|x|}\cdot 2^x$ 的图象大致形状是 （　　）



4．如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=90^\circ, AB=AD=2$，$\triangle BCD$ 为等边三角形，当点 M 在对角线 AC 上运动时，$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ 的最小值为 （　　）

A．$-\frac{3}{2}$　　B．-1

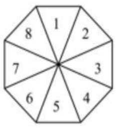
C．$-\frac{1}{2}$　　D．2



5．使"函数 $f(x)=3^{x^2-3tx}$ 在区间 $(2,3)$ 上单调递减"成立的一个充分不必要条件可以是（　　）

A．$t\ge 3$　　B．$t\le 2$　　C．$t\ge 2$　　D．$\frac{4}{3}\le t\le 3$

6．中国是世界上最早发明雨伞的国家，伞是中国劳动人民一个重要的创造.如图所示的雨伞，其伞面被伞骨分成8个区域,每个区域分别印有数字1，2，3，..，8，现准备给该伞面的每个区域涂色，要求每个区域涂一种颜色，相邻两个区域所涂颜色不能相同,对称的两个区域(如区域1与区域5)所涂颜色相同.若有7种不同颜色的颜料可供选择.则不同的涂色方案有（　）



A．1050种　　B．1260种　　C．1302种　　D．1512种

7．甲、乙、丙三人相互做传球训练，第一次由甲将球传出，每次传球时，传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人，下列说法正确的是（　）

A．2次传球后球在丙手上的概率是 $\frac{1}{2}$　　B．3次传球后球在乙手上的概率是 $\frac{1}{4}$

C．3次传球后球在甲手上概率是 $\frac{1}{4}$　　D．n 次传球后球在甲手上概率是 $\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$

8．函数 $f(x)=x|x-a|$ 在区间 $(0,1)$ 上有最大值和最小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[-2\sqrt{2}-2,0)$　　B．$(0,2\sqrt{2}-2]$　　C．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　D．$[2\sqrt{2}-2,1)$

二、**多选题**(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．)

9．下列命题中正确的是 （　　）

A．数据 $1,2,3,4,5,6,7,8$ 的第 25 百分位数是 2

B．若事件 M、N 的概率满足 $P(M)\in(0,1), P(N)\in(0,1)$ 且 $P(M|N)+P(\overline{M})=1$，则 M、N 相互独立

C．已知 $X\sim N(1,\sigma_1^2), Y\sim N(0,\sigma_2^2)$，则 $P(X>1)+P(Y>0)=1$

D．已知随机变量 $X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，若 $D(2X+1)=5$，则 $n=5$

10．若实数 m，$n>0$，满足 $2m+n=1$．以下选项中正确的有 （　　）

A．mn 的最大值为 $\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$

C．$\frac{2}{m+1}+\frac{9}{n+1}$ 的最小值为 5　　D．$4m^2+n^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

11．已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 R，$f(x+2)$ 为偶函数，$f(x)+g(x)=g(2-x)$，且当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=x$，则 （　　）

A．$f(x)$ 为偶函数　　B．$f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称

C．$\sum_{k=1}^{2023} f(k)=1$　　D．8 是函数 $f(x)$ 的一个周期

12．在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为棱 AA_1 上的动点（含端点），则下列说法正确的是 （　　）

A．存在点 M，使得 $C_1M//$ 平面 AB_1C

B．对于任意点 M，都有平面 $C_1MB\perp$ 平面 A_1B_1CD

C．异面直线 C_1M 与 BC 所成角的余弦值的取值范围是 $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$

D．若 $C_1M\perp$ 平面 α，则平面 α 截该正方体的截面图形的周长最大值为 $6\sqrt{2}$

三、**填空题**(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．)

13．设 $f(x^2+1)=\log_a(4-x^4)(a>1)$，则 $f(x)$ 值域是______.

14．已知多项式 $(x-2)(x+1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_2+a_4=$__________.

15．北京时间2023年2月10日0时16分，经过约7小时的出舱活动，神舟十五号航天员费俊龙、邓清明、张陆密切协同，圆满完成出舱活动全部既定任务，出舱活动取得圆满成功.载人飞船进入太空需要搭载运载火箭，火箭在发射时会产生巨大的噪声，已知声音的声强级 $d(x)$（单位：dB）与声强 x（单位：W/m^2）满足关系式：$d(x)=10\lg\frac{x}{10^{-12}}$.若某人交谈时的声强级约为60dB，且火箭发射时的声强与此人交谈时的声强的比值约为 $10^{7.8}$，则火箭发射时的

声强级约为________dB.

16.在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=SB=CA=CB=AB=2$，二面角 $S-AB-C$ 的大小为 $60°$，则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为________.

四、解答题(本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．)

17．已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}, B=\{x\mid x^2-(a+2)x+2a^2-a+1=0\}$.

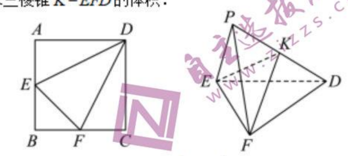
(1)当 $A\cap B=\{1\}$ 时，求实数 a 的值；

(2)若 $A\cup C_R B=R$ 时，求实数 a 的取值范围.

18．如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别为 AB，BC 的中点．将 $\triangle AED$，$\triangle BEF$，$\triangle DCF$ 分别沿 DE，EF，DF 折起，使 A，B，C 三点重合于点 P．

(1)求证：$PD\perp$ 平面 PEF；

(2)若 $AB=6$，且 K 为 PD 的中点，求三棱锥 $K-EFD$ 的体积．



19．已知偶函数 $f(x)$ 定义域为 $(-1,1)$，当 $0\le x<1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的表达式；

(2)用函数单调性的定义证明：函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1)$ 单调递增；

(3)解不等式 $f(2x-1)\le f(x-1)$.

20．区教育局准备组织一次安全知识竞赛．某校为了选拔学生参赛，按性别采用分层抽样的方法抽取 200 名学生进行安全知识测试，记 A=“性别为男”，B=“得分超过 85 分”，且 $P(A\mid\bar{B})=\dfrac{2}{5}$，$P(B\mid\bar{A})=\dfrac{5}{8}$，$P(B)=\dfrac{3}{4}$.

(1)完成下列 2×2 列联表，并根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，能否推断该校学生了解安全知识的程度与性别有关？

性别	了解安全知识的程度		合计
	得分不超过 85 分的人数	得分超过 85 的人数	
男			
女			
合计			

(2)学校准备分别选取参与测试的男生和女生前两名学生代表学校参加区级别的竞赛，已知男生获奖的概率为 $\dfrac{3}{4}$，女生获奖的概率为 $\dfrac{2}{3}$，记该校获奖的人数为 X，求 X 的分布列与数学期望．

下表是 χ^2 独立性检验中几个常用的小概率值和相应的临界值．

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

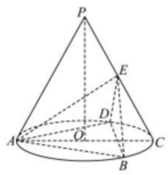
$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

21．如图，P 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，AC 为底面直径，$\triangle ABD$ 为底面圆 O 的内接正三角形，且边长为 $\sqrt{3}$，点 E 在母线 PC 上，且 $AE=\sqrt{3}, CE=1$.

(1)求证：直线 $PO//$ 平面 BDE；

(2)求证：平面 $BED\perp$ 平面 ABD；

(3)若点 M 为线段 PO 上的动点．当直线 DM 与平面 ABE 所成角的正弦值最大时，求此时点 M 到平面 ABE 的距离.



22．若函数 $y=f(x)$ 满足在定义域内的某个集合 A 上，对任意 $x\in A$，都有 $e^x[f(x)-e^x]$ 是一个常数，则称 $f(x)$ 在 A 上具有 M 性质.

(1)设 $y=f(x)$ 是 R 上具有 M 性质的奇函数，求 $f(x)$ 的解析式；

(2)设 $y=g(x)$ 是在区间 $[-1,1]$ 上具有 M 性质的偶函数，若关于 x 的不等式 $g(2x)-2eg(x)+n>0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，求实数 n 的取值范围.

2023年高三数学暑假检测参考答案

1. D

【分析】根据复数的概念和运算逐一判断即可．

【详解】$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，故A错误；

$z^2=(1-i)^2=1-2i-1=-2i$，故B错误；

z的虚部为-1，故C错误．

z的共轭复数为$1+i$，故D正确；

故选：D．

2. C

【解析】先利用分式不等式求解集合B，再利用集合的补集和交集运算求解$A\cap(\complement_R B)$，最后求解集合的真子集个数即可．

【详解】由$\frac{x+1}{x-2}<0$，

解得：$-1<x<2$，

即$B=\{x|-1<x<2\}$，

$\therefore \complement_R B=\{x|x\le -1或x\ge 2\}$，

$\therefore A\cap(\complement_R B)=\{-2,-1,2\}$，

则$A\cap(\complement_R B)$的元素个数为3个．

所以真子集个数为7．

故选：C．

3．**解析：**选B．由函数$f(x)=\frac{x}{|x|}\cdot 2^x=\begin{cases}2^x, & x>0,\\ -2^x, & x<0,\end{cases}$ 可得函数在$(0，+\infty)$上单调递增，且此时函数值大于1；在$(-\infty，0)$上单调递减，且此时函数值大于-1且小于零．结合所给的选项，只有B项满足条件，故选B．

4. A

【分析】利用几何知识易得$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，利用向量加法运算及数量积定义得$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\left(|\overrightarrow{MC}|-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$，

然后利用二次函数求解最值即可，

【详解】由题意，$AB=AD=2$，$\angle ABC=\angle ADC=45^\circ+60^\circ=105^\circ$，

$BC=DC=BD=2\sqrt{2}$，所以$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，

所以$\angle ACB=\angle ACD$，即AC平分$\angle BCD$，

由$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}$可得$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{MC}^2+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=|\overrightarrow{MC}|^2+|\overrightarrow{MC}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\cos150^\circ=|\overrightarrow{MC}|^2-\sqrt{6}|\overrightarrow{MC}|=\left(|\overrightarrow{MC}|-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$，

所以当$|\overrightarrow{MC}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$时，$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$有最小值为$-\frac{3}{2}$．

故选：A

5.A

【分析】求出使得函数$f(x)=3^{x^2-3tx}$在区间$(2,3)$上单调递减时t的范围，结合充分性、必要性的定义即可得出答案．

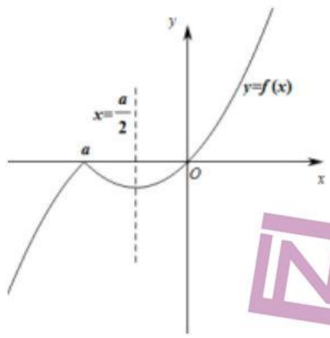
【详解】由函数$f(x)=3^{x^2-3tx}$在区间$(2,3)$上单调递减，

得$y=x^2-3tx$在区间$(2,3)$上单调递减，

所以$\frac{3t}{2}\ge 3$，解得$t\ge 2$．

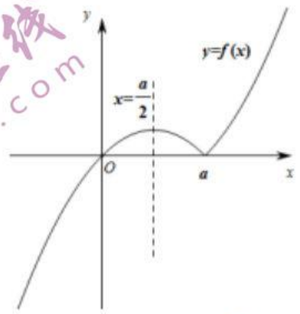
结合 A，B，C，D 四个选项，知使得"函数 $f(x)=3^{x^2-3tx}$ 在区间 $(2,3)$ 上单调递减"成立的一个充分不必要条件可以是 $t\geq 3$.
故选：A.

6．C
【分析】由题意可得，只需确定区域 $1,2,3,4$ 的颜色，先涂区域 1，再涂区域 2，再分区域 3 与区域 1 涂的颜色不同、区域 3 与区域 1 涂的颜色相同，最后根据分步乘法原理即可求解.
【详解】由题意可得，只需确定区域 $1,2,3,4$ 的颜色，即可确定整个平面的涂色.
先涂区域 1，有 7 种选择；再涂区域 2，有 6 种选择.
当区域 3 与区域 1 涂的颜色不同时，区域 3 有 5 种选择，剩下的区域 4 有 5 种选择.
当区域 3 与区域 1 涂的颜色相同时，剩下的区域 4 有 6 种选择.
故不同的涂色方案有 $7\times 6\times(5\times 5+6)=1302$ 种.
故选：C
7．C
【分析】列举出经 2 次、3 次传球后的所有可能，再利用古典概率公式计算作答可判断 ABC，n 次传球后球在甲手上的事件即为 A_n，则有 $A_{n+1}=A_nA_{n+1}+\overline{A}_nA_{n+1}$，利用全概率公式可得 $p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n)$，再构造等比数列求解即可判断 D.
【详解】第一次甲将球传出后，2 次传球后的所有结果为：甲乙甲，甲乙丙，甲丙甲，甲丙乙，共 4 个结果，它们等可能，2 次传球后球在丙手中的事件有：甲乙丙， 1 个结果，所以概率是 $\frac{1}{4}$，故 A 错误；
第一次甲将球传出后，3 次传球后的所有结果为：甲乙甲乙，甲乙甲丙，甲乙丙甲，甲乙丙乙，甲丙甲乙，甲丙甲丙，甲丙乙甲，甲丙乙丙，共 8 个结果，
它们等可能，3 次传球后球在乙手中的事件有：甲乙甲乙，甲乙丙乙，甲丙甲乙，3 个结果，
所以概率为 $\frac{3}{8}$，故 B 错误；
3 次传球后球在甲手上的事件为：甲乙丙甲，甲丙乙甲，2 个结果，所以概率为 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，故 C 正确；
n 次传球后球在甲手上的事件记为 A_n，则有 $A_{n+1}=A_nA_{n+1}+\overline{A}_nA_{n+1}$，
令 $p_n=P(A_n)$，则 $P(A_{n+1}|A_n)=0, P(A_{n+1}|\overline{A}_n)=\frac{1}{2}$，
于是得 $P(A_{n+1})=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P(\overline{A}_n)P(A_{n+1}|\overline{A}_n)=p_n\cdot 0+\frac{1}{2}(1-p_n)$，
故 $p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n)$，则 $p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}(p_n-\frac{1}{3})$，
而第一次由甲传球后，球不可能在甲手中，即 $p_1=0$，则有 $p_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，
数列 $\{p_n-\frac{1}{3}\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，
所以 $p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$,即 $p_n=\frac{1}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^{n-1}\right]$，故 D 错误.
故选：C
8.【答案】D
【详解】由题意，函数 $f(x)=x|x-a|=\begin{cases}x^2-ax, x\geq a\\ -x^2+ax, x<a\end{cases}$，函数 $y=-x^2+ax$ 的图象开口朝下，对称轴为 $x=\frac{a}{2}$，函数 $y=x^2-ax$ 的图象开口朝上，对称轴为 $x=\frac{a}{2}$，当 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 0\\ -x^2, x<0\end{cases}$，函数在 R 上单调递增，不合题意；当 $a<0$ 时，作出函数图象，如图，



易得函数在区间$(0,1)$上无最值；

当$a>0$，作出函数图象，如图，



若要使函数$f(x)$在区间$(0,1)$上既有最大值又有最小值，则$\begin{cases}0<a<1\\ f(1)\le f\left(\frac{a}{2}\right)\end{cases}$即$\begin{cases}0<a<1\\ 1-a\le -\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}\end{cases}$，解得$2\sqrt{2}-2\le a<1$；综上，实数$a$的取值范围是$[2\sqrt{2}-2,1)$.

9．BCD

【分析】对于A，根据百分位数的定义计算判断即可，对于B，由对事件的性质和独立事件的定义分析判断，对于C，由正态分布的性质分析判断，对于D，由二项分布的性质可得$D(X)$，从而可求出$D(2X+1)$，然后解方程求解即可.

【详解】对于A，因为$8\times25\%=2$，所以第25百分位数为$\frac{2+3}{2}=2.5$，所以A错误，

对于B，因为$P(M|N)+P(\overline{M})=1$，所以$P(M|N)=1-P(\overline{M})=P(M)$，

所以$\frac{P(MN)}{P(N)}=P(M)$，所以$P(MN)=P(M)P(N)$，所以M、N相互独立，所以B正确，

对于C，因为$X\sim N(1,\sigma_1^2),Y\sim N(0,\sigma_2^2)$，所以$P(X>1)=\frac{1}{2},P(Y>0)=\frac{1}{2}$，

所以$P(X>1)+P(Y>0)=1$，所以C正确，

对于D，因为$X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，所以$D(X)=n\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}n$，

所以$D(2X+1)=4D(X)=n=5$，所以D正确，

故选：BCD

10．AD

【分析】根据$\because m>0,n>0\therefore 1=2m+n\ge 2\sqrt{2mn}$来验证A项

$\because \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\times(2m+n)$展开基本不等式求解 B 项.

把n用m来表示得$\frac{2}{m+1}+\frac{9}{n+1}=\frac{4}{2m+2}+\frac{9}{n+1}=\frac{4}{3-n}+\frac{9}{n+1}(0<n<1)$

$\frac{4}{3-n}+\frac{9}{n+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3-n}+\frac{9}{n+1}\right)[(3-n)+(n+1)]$验证 C 项.

证明$(a_1+a_2)(b_1+b_2)\geq\left(\sqrt{a_1\cdot b_1}+\sqrt{a_2b_2}\right)^2$，然后$(4m^2+n^2)(1+1)\geq(2m+n)^2$验证 D

【详解】根据基本不等式$\because m>0,n>0\therefore 1=2m+n\geq 2\sqrt{2mn}$

$mn\leq\frac{1}{8}$当且仅当$\begin{cases}2m=n\\2m+n=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=\frac{1}{2}\\m=\frac{1}{4}\end{cases}$时$mn$有最大值$\frac{1}{8}$，所以 A 正确.

$\because \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\times(2m+n)=3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\geq 3+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{2m}{n}}=3+2\sqrt{2}$

当且仅当$\begin{cases}\frac{n}{m}=\frac{2m}{n}\\2m+n=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=\sqrt{2}-1>0\\m=\frac{2-\sqrt{2}}{2}>0\end{cases}$时$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$有最小值为$3+2\sqrt{2}$，所以 B 不正确.

$\because 2m+n=1\Rightarrow n=1-2m\therefore\frac{2}{m+1}+\frac{9}{n+1}=\frac{4}{2m+2}+\frac{9}{n+1}=\frac{4}{3-n}+\frac{9}{n+1}(0<n<1)$

$\frac{4}{3-n}+\frac{9}{n+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3-n}+\frac{9}{n+1}\right)[(3-n)+(n+1)]=\frac{1}{4}\left[13+\frac{4(n+1)}{3-n}+\frac{9(3-n)}{n+1}\right]$

令$t=\frac{3-n}{n+1}=\frac{4-(n+1)}{n+1}=\frac{4}{n+1}-1\in(1,3)$则$\frac{4(n+1)}{3-n}+\frac{9(3-n)}{n+1}=\frac{4}{t}+9t,t\in(1,3)$

又因为$\frac{4}{t}+9t\geq 2\sqrt{\frac{4}{t}\cdot 9t}=12$当且仅当$t=\frac{2}{3}$时取得最小值，所以$\frac{1}{4}\left[13+\frac{4(n+1)}{3-n}+\frac{9(3-n)}{n+1}\right]$的最小值为$\frac{25}{4}$，所以 C 不正确.

$\because a_1>0,a_2>0,b_1>0,b_2>0,(a_1+a_2)(b_1+b_2)-\left(\sqrt{a_1\cdot b_1}+\sqrt{a_2b_2}\right)^2=a_1b_2+a_2b_1-2\sqrt{a_1b_2a_2b_1}$又根据基本不等式

$a_1b_2+a_2\cdot b_1\geq 2\sqrt{a_1b_2\cdot a_2b_1}$当且仅当$a_1b_2=a_2b_1$时取得等号，所以$(a_1+a_2)(b_1+b_2)-\left(\sqrt{a_1\cdot b_1}+\sqrt{a_2b_2}\right)^2\geq 0$即

$(a_1+a_2)(b_1+b_2)\geq\left(\sqrt{a_1\cdot b_1}+\sqrt{a_2b_2}\right)^2$

$\therefore(4m^2+n^2)(1+1)\geq(2m+n)^2=1$当且仅当$\begin{cases}4m^2=n^2\\2m+n=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{4}\\n=\frac{1}{2}\end{cases}$时取得等号.

$\therefore 4m^2+n^2\geq\frac{1}{2}$所以$4m^2+n^2$的最小值为$\frac{1}{2}$故 D 正确.

故选：AD

11．ABD

【分析】根据给定等式推理可得$f(x)+f(2-x)=0$，结合$f(x+2)$为偶函数，再逐项判断作答.

【详解】依题意，$\forall x\in\mathrm{R}$，$f(x)+g(x)=g(2-x)$，即有$f(2-x)+g(2-x)=g(x)$，

两式相加整理得$f(x)+f(2-x)=0$，因此$f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，B 正确；

由$f(x+2)$为偶函数，得$f(-x+2)=f(x+2)$，于是$f(x+2)=-f(x)$，

有$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，因此函数$f(x)$的周期为 4，8 是函数$f(x)$的一个周期，D 正确；

由$f(x)+f(2-x)=0$，得$f(-x)+f(2+x)=0$，而$f(x+2)=-f(x)$，因此$f(-x)=f(x)$，$f(x)$为偶函数，A 正确；

由当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=x$，得 $f(4)=f(0)=0$，而 $f(1)=0$，$f(2)=-f(0)=0$，$f(3)=-f(1)=0$，

即有 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3)=0$，C 错误.

故选：ABD

【点睛】结论点睛：函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，$\forall x\in D$，

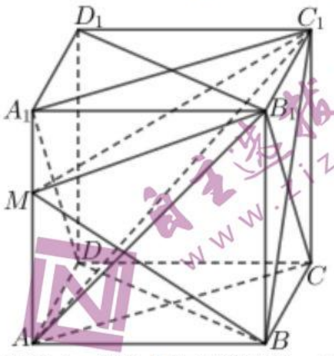
(1)存在常数 a，b 使得 $f(x)+f(2a-x)=2b\Leftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=2b$，则函数 $y=f(x)$ 图象关于点 (a,b) 对称.

(2)存在常数 a 使得 $f(x)=f(2a-x)\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)$，则函数 $y=f(x)$ 图象关于直线 $x=a$ 对称.

12．AB

【分析】利用线面平行的判定判断 A；利用面面垂直的判定判断 B；求出异面直线夹角的余弦范围判断 C；举例说明判断 D 作答.

【详解】在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为棱 AA_1 上的动点（含端点），



对于 A，当点 M 与 A_1 重合时，由 $AA_1//CC_1, AA_1=CC_1$，得 $▱ACC_1A_1$，有 $A_1C_1//AC$，

而 $AC\subset$ 平面 AB_1C，$A_1C_1\not\subset$ 平面 AB_1C，因此 $A_1C_1//$ 平面 AB_1C，即 $C_1M//$ 平面 AB_1C，A 正确；

对于 B，由 $A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，$BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，得 $A_1B_1\perp BC_1$，又 $B_1C\perp BC_1$，

$A_1B_1\cap B_1C=B_1, A_1B_1, B_1C\subset$ 平面 A_1B_1CD，则 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1CD，

而 $BC_1\subset$ 平面 C_1MB，因此平面 $C_1MB\perp$ 平面 A_1B_1CD，B 正确；

对于 C，由 $B_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，$B_1M\subset$ 平面 ABB_1A_1，得 $B_1C_1\perp B_1M$，因为 $B_1C_1//BC$，

显然 $\angle MC_1B_1$ 是锐角，则 $\angle MC_1B_1$ 是异面直线 C_1M 与 BC 所成的角，而 $C_1M\in[2\sqrt{2},2\sqrt{3}]$，

$\cos\angle MC_1B_1=\dfrac{B_1C_1}{C_1M}\in[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$，C 错误；

对于 D，当点 M 与 A_1 重合时，与选项 B 同理得 $A_1C_1\perp$ 平面 BDD_1B_1，当平面 BDD_1B_1 为平面 α 时，

平面 α 截正方体所得截面图形为矩形 BDD_1B_1，其周长为 $4+4\sqrt{2}>6\sqrt{2}$，D 错误.

故选：AB

13．$(-\infty,\log_a 4]$

【分析】根据换元法可先求出 $f(x)$ 的表达式，然后借助二次函数，对数函数，复合函数的性质进行求解.

【详解】设 $x^2+1=t(t\geq 1)$，则 $f(t)=\log_a(4-(t-1)^2)(t\geq 1)$，于是 $f(x)=\log_a(4-(x-1)^2)(x\geq 1)$.

设 $u=4-(x-1)^2(x\geq 1)$，根据二次函数性质，$x\in[1,+\infty)$ 时，u 关于 x 单调递减；

根据对数函数性质，$y=\log_a u$ 在定义域上递增.

于是由复合函数单调性的性质，$f(x)=\log_a(4-(x-1)^2)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

而 $f(1)=\log_a 4$，于是 $f(x)$ 值域是：$(-\infty,\log_a 4]$.

故答案为：$(-\infty,\log_a 4]$

14．-6

【分析】由赋值法即可求解.

【详解】令 $x=1$，则 $-(1+1)^4=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-16$，

令 $x=-1$，则 $0=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$，

两式相加，可得 $a_0+a_2+a_4=\frac{-16}{2}=-8$,

令 $x=0$，则 $a_0=-2$，所以 $a_2+a_4=-6$.

故答案为：-6

15．138dB

【分析】由指数与对数的互化关系结合函数关系式计算即可.

【详解】设人交谈时的声强为 $x_1\,W/m^2$，则火箭发射时的声强为 $10^{7.8}x_1$，且 $60=10\lg\frac{x_1}{10^{-12}}$，得 $x_1=10^{-6}$，

则火箭发射时的声强约为 $10^{7.8}\times10^{-6}=10^{1.8}W/m^2$，

将其代入 $d(x)=10\lg\frac{x}{10^{-12}}$ 中，得 $d(10^{1.8})=10\lg\frac{10^{1.8}}{10^{-12}}=138\text{dB}$，

故火箭发射时的声强级约为138dB.

16. $\frac{52}{9}\pi$ / $\frac{52\pi}{9}$

【分析】取 AB 的中点 D，由题意知 $\triangle SAB$ 和 $\triangle ABC$ 都是等边三角形，从而可得 $SD\perp AB, CD\perp AB$，得 $\angle SDC$ 是二面角 $S-AB-C$ 的平面角，即 $\angle SDC=60°$，设球心为 O，$\triangle SAB$ 和 $\triangle ABC$ 的中心分别为 F,E，则 $OE\perp$ 平面 ABC，$OF\perp$ 平面 SAB，从而可求出外接球的半径，进而可求得球的表面积.

【详解】取 AB 的中点 D，连接 SD,CD，因为 $SA=SB=CA=CB=AB=2$，

所以 $\triangle SAB$ 和 $\triangle ABC$ 都是等边三角形，所以 $SD\perp AB, CD\perp AB$，

所以 $\angle SDC$ 是二面角 $S-AB-C$ 的平面角，即 $\angle SDC=60°$，

设球心为 O，$\triangle SAB$ 和 $\triangle ABC$ 的中心分别为 F,E，则 $OE\perp$ 平面 ABC，$OF\perp$ 平面 SAB，

因为 $DE=DF=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$OD$ 公共边，所以 $\triangle ODE\cong\triangle ODF$，

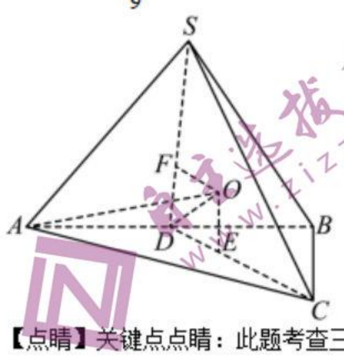
所以 $\angle ODE=\angle ODF=30°$，

因为 $\cos\angle ODE=\frac{DE}{OD}$，所以 $OD=\frac{DE}{\cos\angle ODE}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}$，

所以 $OA=\sqrt{OD^2+AD^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+1}=\frac{\sqrt{13}}{3}$，

所以三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi\cdot OA^2=\frac{52}{9}\pi$

故答案为：$\frac{52}{9}\pi$



【点睛】关键点点睛：此题考查三棱锥外接球问题，解题的关键是根据题意找出三棱锥外接球的球心的位

置，从而可求出球的半径，考查空间想象能力，属于较难题.

17．(1)$a=0$

(2)$(-\infty,0]\cup\{1\}\cup\left(\frac{8}{7},+\infty\right)$

【分析】(1) 由$1\in B$解方程求出a的值，再检验即可；

(2) 由$A\cup \eth_R B=\mathrm{R}$得出$B\subseteq A$，结合子集的定义得出$B$可能为$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，分别讨论这四种情况，得出实数$a$的取值范围.

【详解】(1) $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，

$\because A\cap B=\{1\}$，$\therefore 1\in B$，即$1^2-(a+2)+2a^2-a+1=0$，解得$a=0$或$a=1$.

当$a=0$时，$B=\{x\mid x^2-2x+1=0\}=\{1\}$，符合题意；

当$a=1$时，$B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，$A\cap B=\{1,2\}$，不合题意，

综上，$a=0$.

(2) $\because A\cup \eth_R B=\mathrm{R}$，$\therefore B\subseteq A$，即$B$可能为$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$.

当$B=\varnothing$时，$\Delta=(a+2)^2-4(2a^2-a+1)<0$，即$7a^2-8a>0$，解得$a<0$或$a>\frac{8}{7}$，

当集合B中只有一个元素时，$\Delta=(a+2)^2-4(2a^2-a+1)=0$，解得$a=0$或$a=\frac{8}{7}$，

当$a=0$时，$B=\{x\mid x^2-2x+1=0\}=\{1\}$，符合题意；

当$a=\frac{8}{7}$时，$B=\left\{\frac{11}{7}\right\}$，不符合题意；

当$B=\{1,2\}$时，由根与系数的关系可知$\begin{cases}a+2=1+2\\2a^2-a+1=1\times 2\end{cases}$，

又$\Delta=(a+2)^2-4(2a^2-a+1)>0$，解得$a=1$，

$\therefore$所求实数a的取值范围是$(-\infty,0]\cup\{1\}\cup\left(\frac{8}{7},+\infty\right)$.

18．(1)证明见解析

(2)$\frac{9}{2}$

【分析】(1) 利用线面垂直的判定定理即可得证；

(2) 由题意求得$S_{\triangle PEF}$，由 (1) 知$PD\perp$平面PEF，求得$V_{P-EFD}=9$，根据K为PD的中点，即可求解.

【详解】(1) 在正方形$ABCD$中，$AD\perp AE$，$CD\perp CF$，

折叠后即有$PD\perp PE$，$PD\perp PF$，

又因为$PE\cap PF=P$，$PE,PF\subset$平面PEF，所以$PD\perp$平面PEF；

(2) 由题意知$PE=PF=3$，$PE\perp PF$，故$S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}\times PE\times PF=\frac{9}{2}$，

由 (1) 知$PD\perp$平面PEF，

故$V_{P-EFD}=V_{D-PEF}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle PEF}\times PD=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 6=9$；

因为K为PD的中点，

所以三棱锥$K-EFD$的体积$V_{K-EFD}=\frac{1}{2}V_{P-EFD}=\frac{1}{2}\times 9=\frac{9}{2}$.

19．(1)$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x+1}{1+x^2},x\in(-1,0)\\\dfrac{x^2+x+1}{1+x^2},x\in[0,1)\end{cases}$

(2)证明见解析

(3)$\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$

【分析】(1) 设$-1<x<0$，则$0<-x<1$，即可求出$f(-x)$，再根据$f(x)$为定义在$(-1,1)$上的偶函数，即可得到$f(-x)=f(x)$，从而求出$f(x)$，再写出$f(x)$的解析式即可；

(2) 利用定义法证明函数的单调性，按照设元、作差、变形、判断符号、下结论的过程证明即可；

(3) 根据函数的奇偶性与单调性将函数不等式转化为自变量的不等式，解得即可，需注意函数的定义域；

(1)

解：设$-1<x<0$，则$0<-x<1$，所以$f(-x)=\dfrac{x^2-x+1}{1+x^2}$，因为$f(x)$为定义在$(-1,1)$上的偶函数，所以$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{1+x^2}$，综上可得$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x+1}{1+x^2},x\in(-1,0)\\ \dfrac{x^2+x+1}{1+x^2},x\in[0,1)\end{cases}$

(2)

证明：设任意的$x_1,x_2\in[0,1)$且$x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1^2+x_1+1}{1+x_1^2}-\dfrac{x_2^2+x_2+1}{1+x_2^2}$

$=\dfrac{x_1}{1+x_1^2}-\dfrac{x_2}{1+x_2^2}$

$=\dfrac{x_1(1+x_2^2)-x_2(1+x_1^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

$=\dfrac{(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

因为$x_1,x_2\in[0,1)$且$x_1<x_2$，所以$x_2-x_1>0$，$x_1x_2<1$，所以$\dfrac{(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}<0$，所以$f(x_1)-f(x_2)<0$，

即$f(x)$在区间$[0,1)$单调递增；

(3)

解：因为$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的偶函数，且在$[0,1)$上单调递增，所以函数在$(-1,0)$上单调递减，所以不等式$f(2x-1)\le f(x-1)$等价于$\begin{cases}|2x-1|\le|x-1|\\-1<2x-1<1\\-1<x-1<1\end{cases}$，解得$0<x\le\dfrac{2}{3}$，所以原不等式的解集为$\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$

20. (1)表格见解析，了解安全知识的程度与性别有关

(2)分布列见解析，$E(X)=\dfrac{17}{6}$

【分析】(1) 根据条件概率的有关公式计算出列联表中男女人数，再根据卡方公式计算；

(2) 根据超几何分布的思想计算分布列和数学期望.

【详解】(1)由$P(B)=\dfrac{3}{4}$，超过85分的人数为$200\times\dfrac{3}{4}=150$（人），不超过85分的人数为$200-150=50$（人），

因为$P(\bar{A}|\bar{B})=1-P(A|\bar{B})=\dfrac{3}{5}$，$P(\bar{B}|\bar{A})=1-P(B|\bar{A})=\dfrac{3}{8}$，$P(B)=\dfrac{3}{4}$，$P(\bar{B})=\dfrac{1}{4}$，

所以$P(\bar{A}|\bar{B})\cdot P(\bar{B})=P(\bar{B}|\bar{A})\cdot P(\bar{A})$，即$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}P(\bar{A})$，$P(\bar{A})=\dfrac{2}{5}$，$P(A)=1-P(\bar{A})=\dfrac{3}{5}$，

故200人中男性人数为$200\times\dfrac{3}{5}=120$（人），女性人数为$200-120=80$（人），

又 $P(A|\overline{B})=\frac{2}{5}$，即不超过 85 分的人中，男性为 $50\times\frac{2}{5}=20$（人），女性为 $50-20=30$（人），

故在超过 85 分的人中，男性 $=120-20=100$（人），女性 $=80-30=50$（人），

列联表如下：

性别	了解安全知识的程度		合计
	得分不超过 85 分的人数	得分超过 85 的人数	
男	20	100	120
女	30	50	80
合计	50	150	200

零假设为 H_0：该校学生了解安全知识的程度与性别没有关联．

经计算得到 $\chi^2=\frac{200\times(20\times50-30\times100)^2}{120\times80\times50\times150}=\frac{100}{9}\approx11.11>10.828=x_{0.001}$

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，可以推断 H_0 不成立，即认为了解安全知识的程度与性别有关，此推断犯错误的概率不大于 0.001；

（2）X 可能取 0，1，2，3，4．

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{144}$$

$$P(X=1)=C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{10}{144}\ ;$$

$$P(X=2)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{37}{144}\ ;$$

$$P(X=3)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{60}{144}\ ;$$

$$P(X=4)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{36}{144};$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{144}$	$\frac{10}{144}$	$\frac{37}{144}$	$\frac{60}{144}$	$\frac{36}{144}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{144}+1\times\frac{10}{144}+2\times\frac{37}{144}+3\times\frac{60}{144}+4\times\frac{36}{144}=\frac{17}{6}$．

综上，在犯错误的概率不大于 0.001 的前提下认为了解安全知识的程度与性别有关，数学期望为 $\frac{17}{6}$.

21．(1)证明见解析

(2)证明见解析

(3)$\frac{\sqrt{7}}{14}$

【分析】（1）设 AC 交 BD 于点 F，连接 EF，利用三角形相似证得 $EF\perp AC$，从而证得 $PO//EF$，进而证得直线 $PO//$ 平面 BDE；

（2）通过 $PO\perp$ 平面 ABD，证得 $EF\perp$ 平面 ABD，所以平面 $BED\perp$ 平面 ABD；

（3）建立空间直角坐标系，设 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OP}(0\le\lambda\le1)$，通过向量 $\overrightarrow{DM}$ 和平面 ABE 的法向量建立直线 DM 与平面 ABE 所成角的正弦值的关系式，并利用基本不等式，即可求最值.

【详解】（1）如图，设 AC 交 BD 于点 F，连接 EF，易知 $PO\perp$ 底面 ABD，$AC\subset ABD$，所以 $PO\perp AC$，

又$\triangle ABD$是底面圆的内接正三角形，由$AD=\sqrt{3}$，可得$AF=\frac{3}{2}$，$AC=2$.

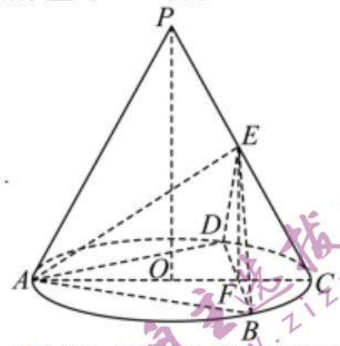
又$AE=\sqrt{3}$，$CE=1$，所以$AC^2=AE^2+CE^2$，即$\angle AEC=90°$，

又$\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\triangle ACE\backsim\triangle AFE$，

所以$\angle AFE=\angle AEC=90°$，即$EF\perp AC$，

又$PO,AC,EF\subset$平面PAC，直线$EF//PO,PO\not\subset$平面BDE，$EF\subset$平面BDE，

所以直线$PO//$平面BDE.



（2）因为$PO//EF,PO\perp$平面ABD，所以$EF\perp$平面ABD，

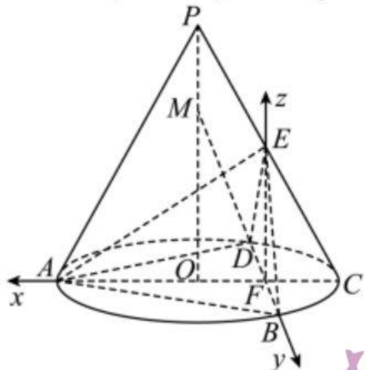
又$EF\subset$平面BED，所以平面$BED\perp$平面ABD；

（3）易知$PO=2EF=\sqrt{3}$，以点F为坐标原点，FA,FB,FE所在直线分别为x轴，y轴，z轴，

建立如图所示的空间直角坐标系，

则$A\left(\frac{3}{2},0,0\right)$，$B\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$D\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$E\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P\left(\frac{1}{2},0,\sqrt{3}\right)$，$O\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，

所以$\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{DO}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{OP}=\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，



设平面ABE的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\\ -\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，令$x=1$，则$\vec{n}=\left(1,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，

设$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OP}\,(0\le\lambda\le1)$，可得$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OM}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\lambda\right)$，

设直线DM与平面ABE所成的角为θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{DM}\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{DM}\right|}=\dfrac{|3\lambda+2|}{\sqrt{7}\times\sqrt{3\lambda^2+1}}$，

即 $\sin^2\theta=\dfrac{9\lambda^2+12\lambda+4}{7\left(3\lambda^2+1\right)}=\dfrac{1}{7}\left(3+\dfrac{12\lambda+1}{3\lambda^2+1}\right)$，

令 $y=\dfrac{12x+1}{3x^2+1},x\in[0,1]$，

则 $y=\dfrac{12x+1}{3x^2+1}=4\left(\dfrac{x+\frac{1}{12}}{x^2+\frac{1}{3}}\right)=4\left[\dfrac{x+\frac{1}{12}}{\left(x+\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\right)^2+\frac{1}{3}}\right]=\dfrac{4}{x+\frac{1}{12}+\dfrac{\frac{49}{144}}{x+\frac{1}{12}}-\frac{1}{6}}\le\dfrac{4}{2\cdot\sqrt{\left(x+\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\dfrac{\frac{49}{144}}{x+\frac{1}{12}}\right)}-\frac{1}{6}}=4$，

当且仅当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立，所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$y=\dfrac{12x+1}{3x^2+1}$ 有最大值 4，

即当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$\sin\theta$ 的最大值为 1，此时点 $M\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{MA}=\left(1,0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以点 M 到平面 ABE 的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{\left|\left(1,0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(1,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\right|}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，

故当直线 DM 与平面 ABE 所成角的正弦值最大时，点 M 到平面 ABE 的距离为 $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

22．(1) $f(x)=e^x-e^{-x}$

(2) $n>e^2+2$

【分析】(1) 设 $e^x\left[f(x)-e^x\right]=a$，即 $f(x)=\dfrac{a}{e^x}+e^x$，利用奇函数的性质求解即可.

(2) 先通过偶函数性质求出 $g(x)=\dfrac{1}{e^x}+e^x$，换元 $\dfrac{1}{e^x}+e^x=k$，把 $g(2x)-2eg(x)+n>0$ 转化为 $n>-k^2+2ek+2$ 在 $k\in\left[2,e+\dfrac{1}{e}\right]$ 上恒成立问题，求出最值即可求解.

【详解】(1) 设 $e^x\left[f(x)-e^x\right]=a$，则 $f(x)=\dfrac{a}{e^x}+e^x$，由题意 $f(x)=\dfrac{a}{e^x}+e^x$ 为奇函数，

所以 $f(-x)=\dfrac{a}{e^{-x}}+e^{-x}=-f(x)=-\left(\dfrac{a}{e^x}+e^x\right)$，即 $(a+1)\left(\dfrac{1}{e^x}+e^x\right)=0$，所以 $a+1=0$，

解得 $a=-1$，

所以 $f(x)=e^x-e^{-x}$；

(2) 设 $e^x\left[g(x)-e^x\right]=b$，则 $g(x)=\dfrac{b}{e^x}+e^x$，由题意 $g(x)=\dfrac{b}{e^x}+e^x$ 为 $[-1,1]$ 上的偶函数，

所以 $g(-x)=\dfrac{b}{e^{-x}}+e^{-x}=g(x)=\dfrac{b}{e^x}+e^x$，即 $(b-1)\left(\dfrac{1}{e^x}-e^x\right)=0$，所以 $b-1=0$，解得 $b=1$，

所以 $g(x)=\dfrac{1}{e^x}+e^x(-1\le x\le 1)$；

则$g(2x)-2eg(x)+n>0$，即$\frac{1}{e^{2x}}+e^{2x}-2e\left(\frac{1}{e^{x}}+e^{x}\right)+n>0$，即$\left(\frac{1}{e^{x}}+e^{x}\right)^{2}-2e\left(\frac{1}{e^{x}}+e^{x}\right)+n-2>0$，设$\frac{1}{e^{x}}+e^{x}=k$，因为$x\in[-1,1]$，所以$e^{x}\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，

又函数$y=x+\frac{1}{x}$在$\left[\frac{1}{e},1\right]$上单调递减，在$[1,e]$上单调递增，故$\frac{1}{e^{x}}+e^{x}=k\in\left[2,e+\frac{1}{e}\right]$，

所以$\left(\frac{1}{e^{x}}+e^{x}\right)^{2}-2e\left(\frac{1}{e^{x}}+e^{x}\right)+n-2=k^{2}-2ek+n-2>0$，即$n>-k^{2}+2ek+2$在$k\in\left[2,e+\frac{1}{e}\right]$上恒成立，函数$y=-k^{2}+2ek+2$在$[2,e]$上单调递增，在$\left[e,e+\frac{1}{e}\right]$上单调递减，

则$(-k^{2}+2ek+2)_{max}=e^{2}+2$，故$n>e^{2}+2$.

【点睛】关键点点睛：函数恒成立问题往往分离参数，转化为求解新函数的最值问题，若函数形式比较复杂，往往采取换元法求解最值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。