2013 年“北约”自主招生数学真题及解析

1. 以$\sqrt{2}$和$1-\sqrt[3]{2}$为两根的有理系数多项式的次数最小是多少？

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 6

解析：显然，多项式$f(x)=(x^2-2)\left[(1-x)^3-2\right]$的系数均为有理数，且有两根分别为$\sqrt{2}$和$1-\sqrt[3]{2}$.于是知，以$\sqrt{2}$和$1-\sqrt[3]{2}$为两根的有理系数多项式的次数的最小可能值不大于 5.

若存在一个次数不超过 4 的有理系数多项式$g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，其两根分别为$\sqrt{2}$和$1-\sqrt[3]{2}$，其中a,b,c,d,e不全为 0，则：

$$g\left(\sqrt{2}\right)=(4a+2c+e)+(2b+d)\sqrt{2}=0\Rightarrow\begin{cases}4a+2c+e=0\\2b+d=0\end{cases}$$

$$g\left(1-\sqrt[3]{2}\right)=-(7a+b-c-d-e)-(2a+3b+2c+d)\sqrt[3]{2}+(6a+3b+c)\sqrt[3]{4}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}7a+b-c-d-e=0\\2a+3b+2c+d=0\end{cases}$$

即方程组：$\begin{cases}4a+2c+e=0 & (1)\\2b+d=0 & (2)\\7a+b-c-d-e=0 & (3)\\2a+3b+2c+d=0 & (4)\\6a+3b+c=0 & (5)\end{cases}$，有非 0 有理数解.

由（1）+（3）得：$11a+b+c-d=0$　（6）

由（6）+（2）得：$11a+3b+c=0$　（7）

由（6）+（4）得：$13a+4b+3c=0$　（8）

由（7）−（5）得：$a=0$，代入（7）、（8）得：$b=c=0$，代入（1）、（2）知：$d=e=0$.

于是知$a=b=c=d=e=0$，与a,b,c,d,e不全为 0 矛盾.所以不存在一个次数不超过 4 的有理系数多项式$g(x)$，其两根分别为$\sqrt{2}$和$1-\sqrt[3]{2}$.

综上所述知，以$\sqrt{2}$和$1-\sqrt[3]{2}$为两根的有理系数多项式的次数最小为 5.

2、在 6×6 的表中停放 3 辆完全相同的红色车和 3 辆完全相同的黑色车，每一行每一列只有一辆车，每辆车占一格，共有几种停放方法？

A. 720　　B. 20　　C. 518400　　D. 14400

解析：先从 6 行中选取 3 行停放红色车，有 C_6^3 种选择.最上面一行的红色车位置有 6 种选择；最上面一行的红色车位置选定后，中间一行的红色车位置有 5 种选择；上面两行的红色车位置选定后，最下面一行的红色车位置有 4 种选择。三辆红色车的位置选定后，黑色车的位置有 3！=6 种选择。所以共有 $C_6^3\times6\times5\times4\times6=14400$ 种停放汽车的方法.

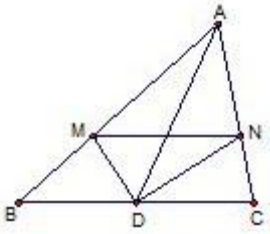
3、如图，ΔABC 中，AD 为 BC 边上中线，DM,DN 分别 $\angle ADB,\angle ADC$ 的角平分线，试比较 $BM+CN$ 与 MN 的大小关系，并说明理由.

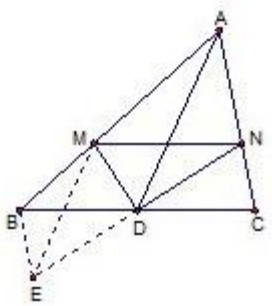
A. BM+CN>MN

B. MN+CN<MN

C. BM+CN=MN[来源:学科网ZXXK]

D.无法确定





解析：如图，延长 ND 到 E，使得 $D\;E$ 1，连接 BE、ME. 易知 $\Delta B\;D\;E$ Δ (，所以 $CN=BE$.又因为 DM,DN 分别为 $\angle ADB,\angle ADC$ 的角平分线，所以 $\angle MDN=90^\circ$，知 MD 为线段 EN 的垂直平分线，所以 $MN=ME$.所以 $BM+CN=BM+BE>ME=MN$.

4、已知 $x^2=2y+5,y^2=2x+5$，求 $x^3-2x^2y^2+y^3$ 的值.

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 16

解析：根据条件知：

$$x^3-2x^2y^2+y^3=x(2y+5)-2(2y+5)(2x+5)+y(2x+5)=15x-15y-4xy-50$$

由 $x^2=2y+5,y^2=2x+5$ 两式相减得 $(x-y)(x+y)=2y-2x$ 故 $y=x$ 或 $x+y=-2$

①若 $x=y$ 则 $x^2=2x+5$，解得 $x=1\pm\sqrt{6}$.于是知 $x=y=1+\sqrt{6}$ 或 $x=y=1-\sqrt{6}$.

当 $x=y=1+\sqrt{6}$ 时，

$x^3-2x^2y^2+y^3=-4xy+15(x+y)-50=-4x^2-30x-50=-4(x^2-2x-5)-38x-70$

[来源:Zxxk.Com]

$=-38x-70=-108-38\sqrt{6}$.[来源:Z*xx*k.Com]

当 $x=y=1-\sqrt{6}$ 时

$x^3-2x^2y^2+y^3=-4xy-15(x+y)-50=-4x^2-30-50=-4(x^2+2x-5)-38x-70$

$x^2+y^2=(2y+5)-(2x+5)=2(y-x)\Rightarrow x+y=-2$ $=-38x-70=-108+38\sqrt{6}$.

（2）若 $x\neq y$，则根据条件知：$x^2+y^2=(2y+5)-(2x+5)=2(y-x)\Rightarrow x+y=-2$，

于是 $x^2+y^2=(2y+5)-(2x+5)=2(x+y)+10=6$，

进而知 $xy=\dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=-1$.

于是知：$x^3-2x^2y^2+y^3=4xy-15(x+y)-50=-16$.

综上所述知，$x^3-2x^2y^2+y^3$ 的值为 $-108\pm38\sqrt{6}$ 或 -16 .

5、Sn 表示数列 $\{a_n\}$ n≧1 前 n 项的和，已知 $a_1=1$，$S_n,S_{n+1}=4a_n+2$，求 a_{2013} .

A. 3019×2^{2012}　　B. 3019×2^{2013}　　C. 3018×2^{2012}　　D.无法确定

解析：根据条件知：$4a_{n+1}+2=S_{n+2}=a_{n+2}+S_{n+1}=a_{n+2}+4a_n+2\Rightarrow a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$.

又根据条件知：$a_1=1,S_2=a_1+a_2=4a_1+2\Rightarrow a_2=5$.

所以数列 $\{a_n\}:a_1=1,a_2=5,a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$.

又 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n\Leftrightarrow a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$.令 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，

则 $b_{n+1}=2b_n,b_1=a_2-2a_1=3$，所以 $b_n=3\cdot2^{n-1}$.即 $a_{n+1}-2a_n=3\cdot2^{n-1}$.

对 $a_{n+1}-2a_n=3\cdot2^{n-1}$，两边同除以 2^{n+1}，有 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{3}{4}$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{3}{4}$.令 $c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，

则 $c_{n+1}=c_n+\frac{3}{4}$，$c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$，于是知 $c_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3n-1}{4}$．所以 $a_n=\frac{3n-1}{4},2^n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}$.于是知：$a_{2013}=(3\times 2013-1)\cdot 2^{2011}=3019\cdot 2^{2012}$.

6、复数 A，B，C 模长都等于且满足 $A+B+C\neq 0$，求 $\frac{AB+BC+CA}{A+B+C}$ 的模长.

A. –1/2　　B. 1　　C. 2　　D.无法确定

解析：根据公式 $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$ 知，$A\cdot\overline{A}=1,B\cdot\overline{B}=1,C\cdot\overline{C}=1$.于是知：

$$\left|\frac{AB+BC+CA}{A+B+C}\right|=\sqrt{\frac{AB+BC+CA}{A+B+C}\cdot\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(A\overline{B}C\overline{C}+\overline{A}BC\overline{C}+B\overline{C}A\overline{A}+\overline{B}CA\overline{A}+C\overline{A}B\overline{B}+\overline{C}AB\overline{B})+(A\overline{A}B\overline{B}+B\overline{B}C\overline{C}+C\overline{C}A\overline{A})}{(A\overline{B}+\overline{A}B+B\overline{C}+\overline{B}C+C\overline{A}+\overline{C}A)+(A\overline{A}+B\overline{B}+C\overline{C})}}$$

$$=\sqrt{\frac{A\overline{B}+\overline{A}B+B\overline{C}+\overline{B}C+C\overline{A}+\overline{C}A+3}{A\overline{B}+\overline{A}B+B\overline{C}+\overline{B}C+C\overline{A}+\overline{C}A+3}}=1.$$

所以 $\frac{AB+BC+CA}{A+B+C}$ 的模长为 1.

7．最多能取多少个两两不等的正整数，使得其中任意三个数之和都为素数.

解析：所有正整数按取模 3 可分为三类：$3k$ 型、$3k+1$ 型、$3k+2$ 型.

首先，我们可以证明，所取的数最多只能取到两类.否则，若三类数都有取到，设所取 $3k$ 型数为 $3a$，$3k+1$ 型数为 $3b+1$，$3k+2$ 型数为 $3c+2$，

则 $3a+(3b+1)+(3c+2)=3(a+b+c+1)$，不可能为素数.所以三类数中，最多能取到两类.

其次，我们容易知道，每类数最多只能取两个.否则，若某一类 $3k+r(r=0、1、2)$ 型的数至少取到三个，设其中三个分别为 $3a+r、3b+r、3c+r$，

则 $(3a+r)+(3b+r)+(3c+r)=3(a+b+c+r)$，不可能为素数.所以每类数最多只能取两个.

结合上述两条，我们知道最多只能取 $2\times2=4$ 个数，才有可能满足题设条件.

另一方面，设所取的四个数为 1、7、5、11，即满足题设条件.
综上所述，若要满足题设条件，最多能取四个两两不同的正整数.

8． 已知 a_1、a_2、a_3、L、$a_{2013}\in R$，满足 $a_1+a_2+a_3+L+a_{2013}=0$，且 $|a_1-2a_2|=|a_2-2a_3|=|a_3-2a_4|=L=|a_{2012}-2a_{2013}|=|a_{2013}-2a_1|$，求证：$a_1=a_2=a_3=L=a_{2013}=0$.

解析：根据条件知:[来源:Zxxk.Com]

$(a_1-2a_2)+(a_2-2a_3)+(a_3-2a_4)+L+(a_{2013}-2a_1)=-(a_1+a_2+a_3+L+a_{2013})=0$,（1）

另一方面，令 $|a_1-2a_2|=|a_2-2a_3|=|a_3-2a_4|=L=|a_{2013}-2a_1|=m$，则 a_1-2a_2、a_2-2a_3、a_3-2a_4、L、$a_{2013}-2a_1$ 中每个数或为 m，或为 $-m$.设其中有 k 个 m，$(2013-k)$ 个 $-m$，则：

$(a_1-2a_2)+(a_2-2a_3)+(a_3-2a_4)+L+(a_{2013}-2a_1)=k\times m+(2013-k)\times(-m)=(2k-2013)m$ （2）

由（1）、（2）知：

$(2k-2013)m=0$ （3）

而 $2k-2013$ 为奇数，不可能为 0，所以 $m=0$.于是知：

$a_1=2a_2,a_2=2a_3,a_3=2a_4,L,a_{2012}=2a_{2013},a_{2013}=2a_1$.

从而知：$a_1=2^{2013}\cdot a_1$，即得 $a_1=0$.同理可知：$a_2=a_3=L=a_{2013}=0$.命题得证.

9．对任意的 θ，求 $32\cos^6\theta-\cos6\theta-6\cos4\theta-15\cos2\theta$ 的值.

解析：根据二倍角和三倍角公式知：

$$32\cos^6\theta-\cos6\theta-6\cos4\theta-15\cos2\theta$$

$$=32\cos^6\theta-(2\cos^2 3\theta-1)-6(2\cos^2 2\theta-1)-15(2\cos^2\theta-1)$$

$$=32\cos^6\theta-\left[2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)^2-1\right]-6\left[2(2\cos^2\theta-1)^2-1\right]-15(2\cos^2\theta-1)$$

$=32\cos^6\theta-(32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1)-(48\cos^4\theta-48\cos^2\theta+6)-(30\cos^2\theta-15)$

$=10$.

10．已知有 mn 个实数，排列成 $m\times n$ 阶数阵，记作 $\{a_{ij}\}_{\text{mxn}}$，使得数阵中的每一行从左到右都是递增的，即对任意的 $i=1、2、3、\cdots、m$，当 $j_1<j_2$ 时，都有 $a_{ij_1}\le a_{ij_2}$.现将 $\{a_{ij}\}_{\text{mxn}}$ 的每一列原有的各数按照从上到下递增的顺序排列，形成一个新的 $m\times n$ 阶数阵，记作 $\{a'_{ij}\}_{\text{mxn}}$，即对任意的 $j=1、2、3、\cdots、n$，当 $i_1<i_2$ 时，都有 $a'_{i_1j}\le a'_{i_2j}$.试判断 $\{a'_{ij}\}_{\text{mxn}}$ 中每一行的 n 个数的大小关系，并说明理由.

解析：数阵 $\{a'_{ij}\}_{\text{mxn}}$ 中每一行的 n 个数从左到右都是递增的，理由如下：

显然，我们要证数阵 $\{a'_{ij}\}_{\text{mxn}}$ 中每一行的 n 个数从左到右都是递增的，我们只需证明，对于任意 $i=1、2、3、\cdots、m$，都有 $a'_{ij}\le a'_{i(j+1)}$，其中 $j=1、2、3、\cdots、n-1$.

若存在一组 $a'_{pq}>a'_{p(q+1)}$.令 $a'_{k(q+1)}=a_{i_k(q+1)}$，其中 $k=1、2、3、\cdots、m$，$\{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_m\}=\{1,2,3,\cdots,m\}$.则当 $t\le p$ 时，都有 $a_{i_tq}\le a_{i_t(q+1)}=a'_{t(q+1)}\le a'_{p(q+1)}<a'_{pq}$.也即在 $a_{iq}(i=1、2、3、\cdots、m)$ 中，至少有 p 个数小于 a'_{pq}，也即 a'_{pq} 在数阵 $\{a'_{ij}\}_{\text{mxn}}$ 的第 q 列中，至少排在第 $p+1$ 行，与 a'_{pq} 排在第 p 行矛盾.

所以对于任意 $i=1、2、3、\cdots、m$，都有 $a'_{ij}\le a'_{i(j+1)}$，即数阵 $\{a'_{ij}\}_{\text{mxn}}$ 中每一行的 n 个数从左到右都是递增的.