

2023届4月质量监测考试

文科数学参考答案

1. B 解析: 因为全集 $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, 所以 $C_U(A \cup B) = \{3, 7\}$, 故选: B.

2. D 解析: $\because (6 - 8i) \cdot z = 25 \cdot |-1 + \sqrt{3}i|$, $\therefore (6 - 8i) \cdot z = 25 \cdot |-1 + \sqrt{3}i| = 25 \times 2$,

$\therefore z = \frac{25}{3 - 4i} = 3 + 4i$, 所以 $\bar{z} = 3 - 4i$. 故选: D.

3. D 解析: $\because 5^y = 20 \Leftrightarrow y = \log_5 20$, $x = \log_{0.4} 0.15 > \log_{0.4} 0.16 = 2$

$y = \log_5 20$, 由 $\log_5 5 < \log_5 20 < \log_5 25$, 即 $1 < \log_5 20 < 2$, 故 $1 < y < 2$

$\therefore 1 < y < x$, 可得 $z = 0.4^{0.5} < 0.4^0 = 1$, 即 $z < 1$

综上: $z < y < x$, 故选: D.

4. A 解析: 由题意, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, 解之得 $\overrightarrow{BA} =$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$, 即 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$. 故选: A.

5. D 解析: 因为 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

$= (\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta)(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta)$

$= \frac{1}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}\right)$

所以 $\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{3}$, $\therefore \tan^2\theta = \frac{1}{2}$, $\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选: D.

6. A 解析: 设食品厂生产 A 和 B 半成品食物分别为 x 、 y 吨,

$$\text{由题意可列} \begin{cases} 3x + 2y \leq 12 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{其表示如图阴影部分区域, } B(2, 3),$$

其面积为 10.

由题意, $z = 3x + 3y \leq 9$ 与 x 轴, y 轴围成的图形面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$,

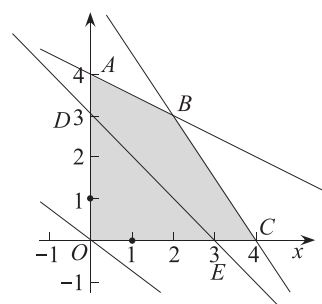
故每天可获利润不超过 9 万元的概率为 $\frac{9}{20}$. 故选: A.

7. C 解析: 如图: 由于木材直径为 D ,

$$W = \frac{1}{6}BH^2 = \frac{1}{6}\sqrt{D^2 - H^2} \cdot H^2 = \frac{1}{6}\sqrt{(D^2 - H^2) \cdot H^4},$$

设 $g(H) = (D^2 - H^2) \cdot H^4$,

所以 $g'(H) = -6H^3(H^2 - \frac{2}{3}D^2) = 0$, $\therefore H = \frac{\sqrt{6}}{3}D$,



因为 $g(H)$ 只有一个极值点,

所以 $H = \frac{\sqrt{6}}{3}D$ 时, W 最大, 此时 $B = \frac{\sqrt{3}}{3}D$, 即 $H: B = \sqrt{2}: 1$, 故选 C.

8. D 解析: 根据题意, $A(-2, 0), B(2, 0), C(0, 4)$, 设 $\triangle ABC$ 外接圆方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

$$\text{则} \begin{cases} 4 - 2D + F = 0 \\ 4 + 2D + F = 0 \\ 16 + 4E + F = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} D = 0 \\ E = -3 \\ F = -4 \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆方程为 $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$, 即 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

则圆心 $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 到直线 $l: 3x - 4y - 9 = 0$ 的距离为 $\frac{\left|3 \times 0 - 4 \times \frac{3}{2} - 9\right|}{5} = 3$. 故选: D.

9. C 解析: 由题意, $\begin{cases} 2a + 2b + c = 0.018 \\ 2b = a + c \\ b - a = 0.002 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 0.002 \\ b = 0.004 \\ c = 0.006 \end{cases}$

故 $40 \times (0.0005 + 0.002 + 0.004 + 0.006) = 0.5$, 则中位数为 160. 故选: C.

10. D 解析: 因为 $f(x+1) + f(3-x) = 0$, 所以 $f(2-x) = -f(x)$, 故 $f(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 对称.

$\therefore f(-2x+1) = f(3+2x)$, $\therefore f(4-x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称.

由 $f(4-x) = -f(2-x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4.

当 $x \in [1, 2]$ 时, $2-x \in [0, 1]$, 所以 $f(x) = -f(2-x) = (x-1)^3$,

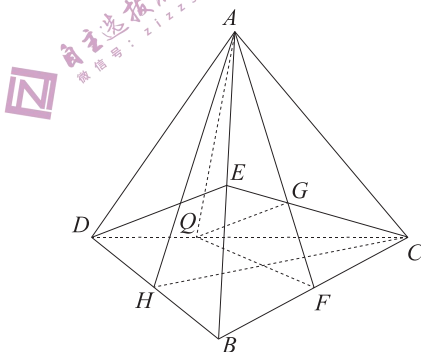
同理可得 $x \in [2, 4]$ 时, $f(x) = (3-x)^3$

当 $x \in [0, 4]$ 时, $f(x) > \frac{1}{8}$ 的解集为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

所以 $f(x) > \frac{1}{8}$ 在实数集上的解集为 $\left(4k + \frac{3}{2}, 4k + \frac{5}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

令 $k=2$, 可知 D 正确. 故选: D.

11. D 解析: 取 BD 的中点 H , 连接 AH, CH . 如图, $CH \perp BD, AH \perp BD$,



而 $CH \subset$ 平面 $AHC, AH \subset$ 平面 $AHC, CH \cap AH = H$, 于是得 $BD \perp$ 平面 AHC , 又 $AC \subset$ 平面 AHC , 所以 $BD \perp AC$. 故①正确;

当 $\frac{CQ}{DQ} = 2$ 时, 连接 CE 交 AF 于 G , 连接 QG, F, E 分别是 BC, AB 的中点,

则 G 是 $\triangle PBC$ 的重心, 有 $\frac{CG}{GE} = 2$, 即有 $\frac{CQ}{DQ} = \frac{CG}{GE}$, 因此 $QG \parallel DE$,

而 $DE \not\subset$ 平面 $AFQ, QG \subset$ 平面 PFQ , 所以 $DE \parallel$ 平面 AFQ , 故②正确;

当平面 ABD 与平面 CBD 垂直时, A 到平面 CBD 的距离最大, 故 $\angle AHC = 90^\circ$. 设 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 的外心为 O_1 与 O_2 , 过 O_1 作垂直于平面 $\triangle ABD$ 的直线 l_1 , 过 O_2 作垂直于平面 $\triangle CBD$ 的直线 l_2 , 则 l_1 与 l_2 的的交点即为外接球的球心 O , 故 O, O_1, H, O_2 四点共圆, 所以 $OO_2 = HO_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

故 $R = \sqrt{OO_2^2 + CO_2^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$, 从而外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \frac{20}{3}\pi$, 故③正确;

故选: D.

12. A 解析: 当 $k \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_{2k+1} = a_{2k} + 1 = a_{(2k-1)} + 1 = \frac{2k+1}{2k-1} a_{2k-1}$, 即 $\frac{a_{2k+1}}{2k+1} = \frac{a_{2k-1}}{2k-1}$.

所以当 n 为奇数时, $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是常数列.

又 $a_1 = 1$, 所以当 n 为奇数时, $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} = 1$, 即 $a_n = n$.

当 n 为偶数时, $a_n = a_{n+1} - 1 = n + 1 - 1 = n$,

所以当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_n = n$, $\therefore a_n \cdot 2^n = n \cdot 2^n$

$T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \times 2^n$,

$2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + (n-1)2^n + n \cdot 2^{n+1}$,

所以 $-T_n = 2 + 2^2 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1}$,

所以 $T_n = (n-1)2^{n+1} + 2$. $T_{2023} = 2022 \cdot 2^{2024} + 2$. 故选: A.

13. $x + 2y + 4 \ln 2 = 0$ 解析: 因为 $f'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$, 所以 $f'(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. 所以切线方程为 $y +$

$1 + 2 \ln 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, 整理可得, $x + 2y + 4 \ln 2 = 0$.

14. $e^{0.35}$ 解析: $\bar{x} = \frac{3+4+6+7}{4} = 5$, $\bar{z} = \frac{2.5+3+4+5.9}{4} = 3.85$,

$3.85 = 0.7 \times 5 + a$, $a = 3.85 - 0.7 \times 5 = 0.35$,

所以 $\hat{z} = 0.7x + 0.35$, 由 $z = \ln y$, 得 $\ln y = 0.7x + 0.35$, $y = e^{0.7x+0.35} = e^{0.35} \cdot e^{0.7x}$,

所以 $c = e^{0.35}$.

15. $\frac{\pi}{6}$ 解析: 函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后,

得到的图象对应的解析式是: $y = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$,

由于该函数为偶函数, 故 $-\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的减区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, 而函数又在 $[-a, a]$ 上单调递减,

所以 $\begin{cases} -\frac{\pi}{6} \leq -a \\ \frac{\pi}{3} \geq a \end{cases}$, 于是 $0 < a \leq \frac{\pi}{6}$. 故 a 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

16. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 解析: 根据图形特点, 以对称中心为原点, 设截面双曲线所在的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则

$a = 1$, 曲线一点坐标为 $(2, 1)$, 代入方程可得 $b^2 = \frac{1}{3}$, 所以 $c^2 = \frac{4}{3}$, $\therefore e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

17. 解: (1) 因为 $\sin A \sin B = \sin^2 A - 2 \sin^2 B$, 所以 $ab = a^2 - 2b^2$,

解之得 $a = 2b$ (2分)

因为 $S = 3\pi$, 所以 $2R = 2\sqrt{3}$, 所以 $2R = \frac{c}{\sin C}$, $\therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $C = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ (3分)

当 $C = \frac{\pi}{3}$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, $\therefore 9 = 5b^2 - 4b^2 \times \frac{1}{2} = 3b^2$, $\therefore b = \sqrt{3}$, $a = 2\sqrt{3} > c$ (舍),
..... (5分)

当 $C = \frac{2\pi}{3}$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, $\therefore 9 = 5b^2 + 4b^2 \times \frac{1}{2} = 5b^2$, $\therefore b = \frac{3\sqrt{7}}{7}$, $a = \frac{6\sqrt{7}}{7} < c$,
故 $b = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ (7分)

(2) 因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$, 所以 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}CD \cdot b \sin \angle ACD + \frac{1}{2}CD \cdot a \sin \angle BCD$
..... (9分)

所以 $\frac{1}{2} \times \frac{6\sqrt{7}}{7} \times \frac{3\sqrt{7}}{7} \sin 120^\circ = \frac{1}{2}CD \cdot \frac{3\sqrt{7}}{7} \sin 60^\circ + \frac{1}{2}CD \cdot \frac{6\sqrt{7}}{7} \sin 60^\circ$ (10分)

故 $CD = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ (12分)

18. 解: (1) 连接 OF , O_1O , 因为 O 为 CD 的中点, 所以 $OF \parallel CE$, (1分)

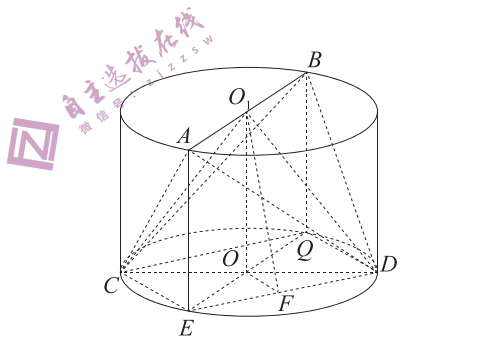
又 $CE \subset$ 平面 AEC , $OF \not\subset$ 平面 AEC , 所以 $OF \parallel$ 平面 AEC ,
由四边形 O_1AEO 为矩形, 所以 $O_1O \parallel AE$, (2分)

又 $AE \subset$ 平面 AEC , $O_1O \not\subset$ 平面 AEC , 所以 $O_1O \parallel$ 平面 AEC , (3分)

因为 $O_1O \cap OF = O$, $O_1O, OF \subset$ 平面 O_1OF ,
所以平面 $O_1OF \parallel$ 平面 AEC , (4分)

因为 $O_1F \subset$ 平面 DOF ,
所以 $O_1F \parallel$ 平面 AEC , (5分)

(2)



分别过 B 作圆柱的母线 BQ , 连接 CQ, DQ, EQ , 可知 $AB \parallel EQ$, 所以 $\angle COE$ 为异面直线 AB 与 CD 所成的角 (或其补角), 故 $\angle COQ = 60^\circ$ 或 120° ,

又 $CE > DE$, 故 $\angle COQ = 60^\circ$, (6分)

连接 $CO_1, DO_1, OO_1 \perp$ 平面 O , (7分)

故点 A 到平面 O_1CD 的距离为 $1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

同样点 B 到平面 O_1CD 的距离为 $1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (8分)

$$S_{O_1CD} = \frac{1}{2}CD \cdot O_1O = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, \dots\dots\dots (9分)$$

$$\text{所以 } V_{A-BCD} = V_{A-O_1CD} + V_{B-O_1CD} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots (10分)$$

$$\text{因为圆柱的体积为 } V = 2\pi, \dots\dots\dots (11分)$$

$$\text{故圆柱挖去三棱锥 } A-BCD \text{ 后的几何体的体积 } 2\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots (12分)$$

19. 解: (1) 设零假设为 H_0 : 同学的红包保存情况与年龄大小无关,

$$\text{根据数表可得 } \chi^2 = \frac{100(15 \times 50 - 25 \times 10)^2}{75 \times 25 \times 60 \times 40} = \frac{50}{9} > 5.024, \dots\dots\dots (2分)$$

所以零假设 H_0 是错的,

故有 97.5% 的把握可以认为同学的红包保存情况与年龄大小有关. $\dots\dots\dots (4分)$

(2) 根据题意, 分层抽样选取 8 人, 未交给父母保存红包的人数有 $8 \times \frac{15}{40} = 3$ (人),

设为 a, b, c ;

交给父母保存红包的人数有 $8 \times \frac{25}{40} = 5$ (人), 设为 $A, B, C, D, E, \dots\dots\dots (6分)$

则 8 人随机抽取 2 人的所有结果为 $(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, a), (A, b), (A, c), (B, C), (B, D), (B, E), (B, a), (B, b), (B, c), (C, D), (C, E), (C, a), (C, b), (C, c), (D, E), (D, a), (D, b), (D, c), (E, a), (E, b), (E, c), (a, b), (a, c), (b, c)$ 共 28 种结果, $\dots\dots\dots (8分)$

其中满足均将红包交给父母保存的结果为 $(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)$ 有 10 种 $(10分)$

$$\text{所以概率为 } \frac{10}{28} = \frac{5}{14}. \dots\dots\dots (12分)$$

20. 解: (1) 设 $F_2(c, 0)$, 则 $\angle AF_2B = 120^\circ$, 所以 $2b = \sqrt{3}a, \therefore b = \sqrt{3}c. \dots\dots\dots (1分)$

设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$, 即 $3x^2 + 4y^2 - 12c^2 = 0$,

$$\therefore AF_2 = a, OF_2 = c, a = 2c,$$

$$\therefore \angle AF_2O = \frac{\pi}{3}, \therefore \triangle AF_1F_2 \text{ 为正三角形,}$$

\therefore 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点, DE 为线段 AF_2 的垂直平分线,

$$\therefore \text{直线 } DE \text{ 的斜率为 } \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 斜率倒数为 } \sqrt{3}, \dots\dots\dots (3分)$$

直线 DE 的方程: $x = \sqrt{3}y - c$, 代入椭圆方程 $3x^2 + 4y^2 - 12c^2 = 0$,

整理化简得到: $13y^2 - 6\sqrt{3}cy - 9c^2 = 0$,

$$\text{判别式 } \Delta = (6\sqrt{3}c)^2 + 4 \times 13 \times 9c^2 = 6^2 \times 16 \times c^2,$$

$$\therefore |DE| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} |y_1 - y_2| = 2 \times \frac{\sqrt{\Delta}}{13} = 2 \times 6 \times 4 \times \frac{c}{13} = \frac{48}{13}. \dots\dots\dots (4分)$$

$\therefore c = 1$, 所以 $a = 2$.

$$\text{故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \dots\dots\dots (5分)$$

(2) 设 $M(x_1, y_1), P(-x_1, -y_1), N(x_2, y_2), Q(x_3, y_3)$

因为 $F_2(1, 0)$, 所以 $\frac{y_1}{x_1 - 1} = \frac{y_2}{x_2 - 1}$, 即 $y_1x_2 - y_2x_1 = y_1 - y_2$ ①, (6分)

又因为点 M, N 均在椭圆上, 所以
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \\ \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1 \end{cases},$$

两式整理, 可得, $\frac{y_1^2x_2^2 - y_2^2x_1^2}{4} = y_1^2 - y_2^2$ ②,

由②除以①可得 $\frac{y_1x_2 + y_2x_1}{4} = y_1 + y_2$, 消元可得
$$\begin{cases} x_2 = \frac{5x_1 - 8}{2x_1 - 5} \\ y_2 = \frac{3y_1}{2x_1 - 5} \end{cases},$$

同理可得
$$\begin{cases} x_3 = \frac{5x_1 + 8}{2x_1 + 5} \\ y_3 = \frac{3y_1}{2x_1 + 5} \end{cases}, \dots\dots\dots (8分)$$

所以直线 NQ 的方程为 $y = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}x + \frac{y_2y_3 - y_3y_2}{x_3 - x_2}$, (10分)

又 $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{5y_1}{3x_1}$, $\frac{y_2y_3 - y_3y_2}{x_3 - x_2} = -\frac{8y_1}{3x_1}$, (10分)

所以直线 NQ 的方程为 $y = \frac{y_1}{3x_1}(5x - 8)$, 故直线 NQ 过定点 $(\frac{8}{5}, 0)$ (12分)

21. 解: (1) 因为 $f(x) = x(\ln x - a) (x > 0)$, 所以 $f'(x) = \ln x + 1 - a$ (1分)

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > e^{a-1}$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < e^{a-1}$ (2分)

所以 $f(x)$ 在 $(0, e^{a-1})$ 上为减函数, 在 $(e^{a-1}, +\infty)$ 上为增函数, (3分)

所以 $f_{\min}(x) = f(e^{a-1}) = -e^{a-1}$ (3分)

所以 $-e^{a-1} = -1$, $\therefore a = 1$ (4分)

(2) 由 $f(x) + ax < e^x - \sin x + 1$, 可得 $e^x - \sin x + 1 - x \ln x > 0$ (5分)

设 $g(x) = e^x - \sin x + 1 - x \ln x$, $\therefore g'(x) = e^x - \cos x - 1 - \ln x$ (6分)

当 $x \in (0, 1)$ 时, $-\ln x > 0$, (6分)

设 $l(x) = e^x - \sin x - 1 (x > 0)$, 则 $l'(x) = e^x - \cos x > 0$, $\therefore l(x)$ 单调递增,

$\therefore l(x) > l(0) = 0$, \therefore 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > 0$ 恒成立. (7分)

当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 设 $\varphi(x) = -\ln x + e^x - \cos x - 1 (x \geq 1)$, 则 $\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + e^x + \sin x$,

$\therefore x \geq 1$, $\therefore e^x \geq e$, $\sin x \in [-1, 1]$, $-\frac{1}{x} \in [-1, 0)$, $\therefore \varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增.

$\therefore \varphi(x) \geq \varphi(1) = e - \cos 1 - 1 > 0$ (8分)

\therefore 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $\therefore g(x) \geq g(1) = e - \sin 1 - 1 > 0$, 即当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$ 恒成立.

由 (1) 可知: $x \ln x - x \geq -1$, $\therefore x \ln x \geq x - 1$ (9分)

只需证 $x - 1 > \sin x - 1$,

需证 $x > \sin x (x > 0)$, 设 $h(x) = x - \sin x$.

$\therefore h'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x) > h(0) = 0$... (11分)

故 $x > \sin x (x > 0)$, 即 $x - 1 > \sin x - 1$.

故 $\sin x - 1 < x \ln x < e^x - \sin x + 1$, 结论得证. (12分)

22. (本小题满分10分) 解: 以极点为原点, 极轴为 x 轴的正半轴, 建立平面直角坐标系,

$$\because \rho_1 \cos \frac{\pi}{3} = 2, \therefore \rho_1 = 4, \text{ 故 } x = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 2, y = 4 \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3},$$

所以 M 点坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$. (2分)

$$\text{又 } \rho_2 = 4\sqrt{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } x = 2\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = 3, y = 2\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

所以 N 点坐标为 $(3, \sqrt{3})$. (4分)

$$\text{由 } \rho^2 \cos 2\theta = 4 \text{ 得: } \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 4,$$

故曲线 C 的直角坐标方程为: $x^2 - y^2 = 4$. (5分)

(2) 因为 $k_{AB} = -\sqrt{3}$, 所以 AB 普通方程为 $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$, 故 $P(0, 4\sqrt{3})$, (6分)

$$\text{设 } AB \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}, t \text{ 为参数, 与 } x^2 - y^2 = 4.$$

联立得到, $t^2 + 24t + 104 = 0$,

所以 $t_1 + t_2 = -24, t_1 t_2 = 104$, (8分)

$$\text{所以 } \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 \cdot t_2|} = \frac{|t_1 + t_2|}{|t_1 \cdot t_2|} = \frac{24}{104} = \frac{3}{13}$$
 (10分)

23. 解: (1) 当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = (x-1)x + (x-2)(x-1) = 2(x-1)^2 \geq 0$, 所以 $x \in \phi$ (1分)

当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) = (x-1)x + (2-x)(x-1) = 2(x-1) \leq 0$, $\therefore x \leq 1$, 所以 $x \in \phi$

(3分)

当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = (1-x)x + (2-x)(x-1) = -2(x-1)^2 \leq 0$, $\therefore x \leq 1$,

综上, $M = 1$ (5分)

$$\begin{aligned} (2) & \text{ 由于 } [(a-2) + (b-1) + (c+1)]^2 \\ & = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2 + 2[(a-2)(b-1) + (b-1)(c+1) + (c+1)(a-2)] \\ & \leq 3[(a-2)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2], \end{aligned}$$
 (8分)

$$\text{所以 } (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2 \geq \frac{[(a-2) + (b-1) + (c+1)]^2}{3} = \frac{(a+b+c-2)^2}{3} = \frac{1}{3},$$

故 $(a-2)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2 \geq \frac{1}{3}$. (10分)