

高三数学

满分:150分 考试时间:120分钟

注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 选择题必须使用2B铅笔填涂;非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的笔书写,字体工整、笔迹清晰。
3. 请按照题序在各题目的答题区域内作答,超出答题区域的答案无效;在草稿纸、试题卷上的答题无效。
4. 保持答题卡卡面清洁,不要折叠、不要弄破、弄皱,不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。
5. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $P = \{x | x \text{ 是平行四边形}\}$, $Q = \{x | x \text{ 是矩形}\}$, $R = \{x | x \text{ 是菱形}\}$, $S = \{x | x \text{ 是正方形}\}$, 则 $Q \cap R =$

- A. P B. Q C. R D. S

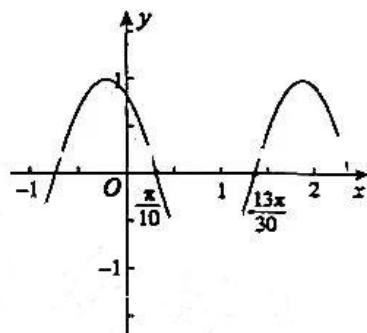
2. 设命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, q_1(x) > q_2(x)$, 则 $\neg p$ 为

- A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, q_1(x_0) > q_2(x_0)$ B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, q_1(x_0) \leq q_2(x_0)$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, q_1(x) \leq q_2(x)$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, q_1(x) < q_2(x)$

3. 如图是函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的部分图象,

则 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{90}, \frac{22\pi}{45}]$ 上的值域为

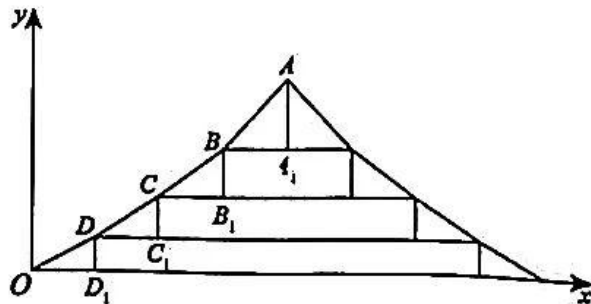
- A. $[-1, 1]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$
C. $[-1, \frac{1}{2}]$ D. $[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}]$



4. 过坐标原点且与曲线 $y = \frac{\ln x}{x}$ 相切的直线斜率为

- A. 1 B. $\frac{1}{2e}$ C. $\frac{1}{e}$ D. $\frac{1}{2}$

5. 如图,中国古代建筑的举架结构的纵截面示意图,其中的线段 DD_1, CC_1, BB_1, AA_1 都是竖直放置的,线段 OD_1, DC_1, CB_1, BA_1 都是水平放置的,且 $OD_1 = DC_1 = CB_1 = BA_1$. 令 $\frac{CC_1}{DC_1} = k_1, \frac{BB_1}{CB_1} = k_2, \frac{AA_1}{BA_1} = k_3$, 若 k_1, k_2, k_3 成公差为 0.15 的等差数列,且直线 OA, OD 的斜率分别为 0.75, 0.45, 则 $k_1 k_2 k_3 =$



- A. 0.595 B. 2.55 C. 1.6 D. 0.7225

6. 已知函数 $f(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}}$, 若当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f(x) + f\left(\frac{a}{x} - 2\sqrt{3}\right) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是

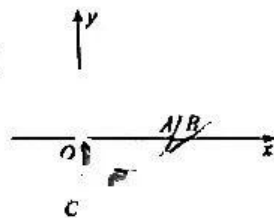
- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2BC=2AA_1=2$, 则 BD 与平面 A_1B_1CD 所成角的正弦值为

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

8. 如图, 二次函数 $y = x^2 - 2x$ 的图象为曲线 E , 过 E 上一点 P (位于 x 轴下方) 作 E 的切线 l 与 x 的正半轴, y 的负半轴分别交于 B, C 点, 当 l, E, x 轴及 y 轴围成阴影部分的面积取得最小值时, P 到 x 轴的距离为

- A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{4}{3}$
C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{15}{16}$



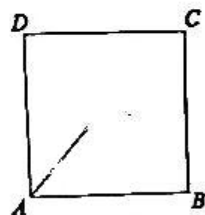
二、选择题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知实数 a, b 满足 $a > b > 0$ 且 $a + b = 2$, 则下列结论正确的有

- A. $a^2 + b^2 > 2$ B. $\frac{8}{a} + \frac{2}{b} \geq 9$ C. $\ln a + \ln b > 0$ D. $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$

10. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 动点 P 在正方形内部及边上运动, $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD}$, 则下列结论正确的有

- A. 点 P 在线段 BC 上时, $\vec{AB} \cdot \vec{AP}$ 为定值
B. 点 P 在线段 CD 上时, $\vec{AB} \cdot \vec{AP}$ 为定值
C. $\lambda + \mu$ 的最大值为 2
D. 使 $\lambda + 2\mu = \frac{1}{2}$ 的 P 点轨迹长度为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$



11. 古希腊哲学家芝诺提出了如下悖论: 一个人以恒定的速度径直从 A 点走向 B 点, 要先走完总路程的三分之一, 再走完剩下路程的三分之一, 如此下去, 会产生无限个“剩下的路程”, 因此他有无限个“剩下路程的三分之一”要走, 这个人永远走不到终点. 由于古代人们对无限认识的局限性, 故芝诺得到了错误的结论. 设 $AB = S$, 这个人走的第 n 段距离为 a_n , 这个人走的前 n 段距离总和为 S_n , 则下列结论正确的有

- A. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_{n+1} = \frac{2(S - S_n)}{3}$ B. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$
C. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\frac{S_n}{S} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ D. $\exists n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\frac{S_n}{S} = 1$

12. 已知正四棱台上、下底面的面积分别为 2 和 8, 高为 h ($h > 0$), 则下列结论正确的有

- A. 正四棱台外接球的表面积的最小值为 16π
B. 当 $h \in (0, \sqrt{3})$ 时, 正四棱台外接球球心在正四棱台下底面下方
C. 正四棱台外接球的半径随 h 的增大而增大
D. 当 $h = 2$ 时, 正四棱台存在内切球

三、填空题:共4小题,每小题5分,共20分。

13. 假设某地2022年年初的物价为1,每年以5%的增长率递增,则2030年年底物价的数值为_____。
14. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (平面 $A_1B_1C_1D_1$ 为下底面) 中, $2AA_1 = 3AD = 6$, $AB = 4$, 点 F 为线段 C_1D_1 的中点, 则异面直线 A_1D 与 BF 所成角的余弦值为_____。
15. 在三角形 ABC 中, 已知 D, E 分别为 CA, CB 上的点, 且 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, AE 与 BD 交于 O 点, 若 $\overrightarrow{CO} = m\overrightarrow{CA} + n\overrightarrow{CB}$, 则 mn 的值为_____。
16. 已知三棱锥 $V-ABC$ 的高为3, D, E, F 分别为 VC, VA, VB 的中点, 若平面 ABD , 平面 BCE , 平面 ACF 相交于 O 点, 则 O 到平面 ABC 的距离 h 为_____。

四、解答题:共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

已知平面向量 $a = (x, -1), b = (1, 1-2x), x \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $a \perp b$, 求 x 的值;
 (2) 若 $a = \lambda b$ (λ 为负实数), 求 x, λ 的值.

18. (12分)

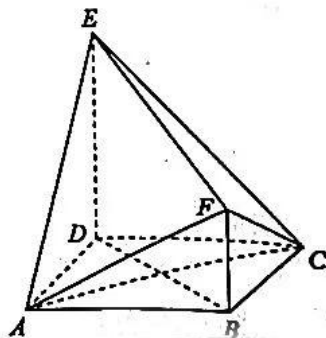
已知 $\{a_n\}$ 是公差为3的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为2的等比数列, 且 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3 + 1 = \frac{b_4 - a_4}{5}$.

- (1) 求 a_1, b_1 ;
 (2) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 将集合 $T = \left\{ m \mid \frac{S_m}{m} = b_n, 1 \leq n \leq 6 \right\}$ 用列举法表示出来.

19. (12分)

如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 平面 $DEFB \perp$ 平面 $ABCD$, $ED \perp BD, FB \perp BD, AB = ED = 2FB = 2a$ ($a > 0$).

- (1) 求三棱锥 $F-ACE$ 的体积;
 (2) 求平面 AEF 与平面 ABF 夹角的正弦值.



20. (12分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a^2 + c^2 = b^2 + 2, \cos^2 B = \frac{1}{2}$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

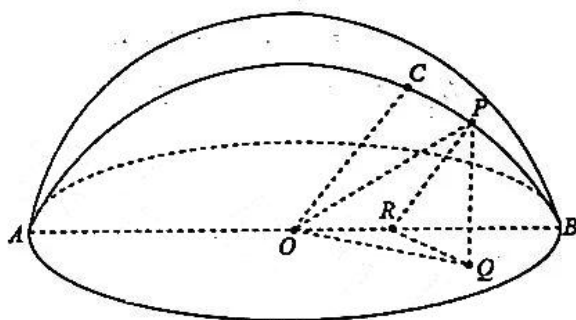
(2) 若 $\cos A = \frac{3}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

21. (12分)

如图, AB 是半球的直径, O 为球心, $AB = 2$, C 为半大圆弧的中点, P 为同一半大圆弧上的任意一点 (异于 A, B), P 在水平大圆面 AOB 内的射影为 Q , 过 Q 作 $QR \perp AB$ 于 R , 连接 PR, OP .

(1) 若 C, P 为不同的两点, 求证: $OC \parallel PR$;

(2) 若半大圆面 ACB 与水平大圆面夹角大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求三棱锥 $P-OQR$ 体积的取值范围.



22. (12分)

设函数 $f(x) = e^x \cos x, g(x) = \frac{a \cos x}{e^{2x}}, x \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值, 并证明: $e^{\frac{\pi}{3}} < \sqrt{2}$;

(2) 若不等式: $g(x) \geq 2 - e^{3x}$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线