新疆维吾尔自治区 2023 年普通高考第二次适应性检测

理科数学参考答案

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	C	C	B	C	D	A	A	A	B	D

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　14. $\dfrac{2}{3}$　　15. $-3\sqrt{3}$　　16. -3033

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 解：（1）由已知得 $\begin{cases} S_n = p(a_n - 1) & ① \\ S_{n+1} = p(a_{n+1} - 1) & ② \end{cases}$，②－①得 $a_{n+1} = pa_{n+1} - pa_n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$，

所以 $(p-1)a_{n+1} = pa_n$，又因为 $p \neq 1$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{p}{p-1}$，

当 $n=1$ 时，$a_1 = pa_1 - p$，故 $a_1 = \dfrac{p}{p-1}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\dfrac{p}{p-1}$，公比为 $\dfrac{p}{p-1}$ 的等比数列. ························6 分

（2）由（1）知 $a_n = 2^n$，所以 $S_n = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$，

故 $b_n = \dfrac{2^{n+1}}{4(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^n - 1} - \dfrac{1}{2^{n+1} - 1}\right)$，

所以 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$

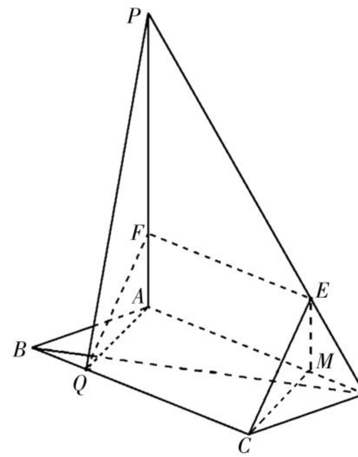
$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^1 - 1} - \dfrac{1}{2^2 - 1} + \dfrac{1}{2^2 - 1} - \dfrac{1}{2^3 - 1} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1} - \dfrac{1}{2^{n+1} - 1}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1} - 1}\right)$，

又因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\dfrac{1}{2^{n+1}-1}>0$，

所以 $T_n<\dfrac{1}{2}$. ……………………………12 分

18. 解:（1）作 $EF\,//\,AD$ 交 PA 于 F，作 $EM\,//PA$ 交 AD 于 M，



连接 CM， FQ，易得 $EF\underline{\underline{//}}MA$.

因为 $\dfrac{|DE|}{|EP|}=\dfrac{|DM|}{|MA|}=\dfrac{|BQ|}{|QC|}$，

且 $|DM|+|MA|=|BQ|+|QC|$，所以 $AM\underline{\underline{//}}QC$，

又 $EF\underline{\underline{//}}MA$，所以 $EF\underline{\underline{//}}CQ$.

故四边形 $EFQC$ 是平行四边形，所以 $CE//FQ$，

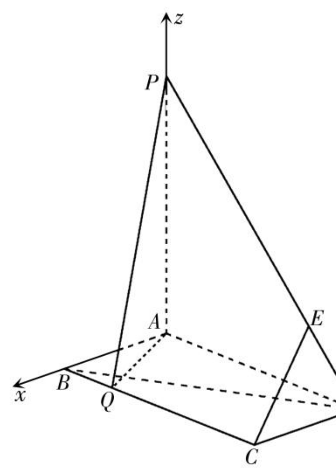
又 $FQ\subset$ 平面 PAQ， $CE\not\subset$ 平面 PAQ，

所以 $CE\,//$ 平面 PAQ. ………………………………………………………………6 分

（2）以 A 为坐标原点，AB 方向为 x 轴，AD 方向为 y 轴，AP 方向为 z 轴建立坐标系，

设 $|BQ|=t\ \ (0<t<4)$，则 $A(0,0,0)$， $D(0,4,0)$， $P(0,0,4)$， $Q(2,t,0)$.

设平面 PAQ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，



$\overrightarrow{AP}=(0,0,4)$， $\overrightarrow{AQ}=(2,t,0)$，

则有 $\begin{cases}4z_1=0\\2x_1+\mathrm{t}y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=t$，则 $\boldsymbol{n}_1=(t,-2,0)$.

设平面 PQD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

$\overrightarrow{PD}=(0,4,-4)$， $\overrightarrow{PQ}=(2,t,-4)$，

则有 $\begin{cases}4y_2-4z_2=0\\2x_2+ty_2-4z_2=0\end{cases}$， 令 $y_2=2$，则 $\boldsymbol{n}_2=(4-t,2,2)$.

若存在二面角 $A-PQ-D$ 是直二面角，则 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，即 $4\mathrm{t}-\mathrm{t}^2-4=0$，

解得 $t=2$， $Q(2,2,0)$.

故存在点 Q 是 BC 的中点时，使得二面角 $A-PQ-D$ 是直二面角，

此时 $\dfrac{|BQ|}{|CQ|}=1$. ……………………………………………………………12 分

19. 解：（1）由于甲队每场比赛平局的概率都是 $\dfrac{1}{4}$，所以甲队三场比赛打平的场次，即随机变量 X 服从二项分布，由题意得 $X \sim B(3,\dfrac{1}{4})$，其分布列如下：

$$P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64},\ P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{64},$$

$$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^1=\frac{9}{64},\ P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^0=\frac{1}{64},$$

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{9}{64}$	$\dfrac{1}{64}$

数学期望 $E(X)=3\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$. ……………………………………………6 分

（2）由已知得不同的对阵情况共有 $A_3^3=6$ 种，每种可能性出现的概率均为 $\dfrac{1}{6}$.

设甲队第二轮对阵乙队至少连续获胜两场的概率为 p_1，甲队第二轮对阵丙队至少连续获胜两场的概率为 p_2，甲队第二轮对阵丁队至少连续获胜两场的概率为 p_3，则

$$p_1=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12};$$

$$p_2=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{72};$$

$$p_3=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times1+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times1+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18};$$

因为 $p_1>p_2>p_3$，所以甲队在第二轮对阵乙队时，p 的取值最大，最大值为 $\dfrac{1}{12}$.

……………………………………………………………………………12 分

20. 解：（1）由题意知 $f(x)=x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}(x+\ln x)$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，

所以 $f'(x)=(x+1)(\mathrm{e}^{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{x})$，

易见 $p(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{x}$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上递增，且 $p(1)=0$，

所以当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$p(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，

当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$p(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

故 $f(x)\geq f(1)=0$，所以 f（x）的最小值为 0. ……………………………5 分

（2）原不等式等价于 $x\mathrm{e}^{x}-\left(x+\ln x\right)\geq\left(b-2\right)x+1$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，

即 $x\mathrm{e}^{x}+x-\ln x-1\geq bx$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，

也即 $\dfrac{x\mathrm{e}^{x}+x-\ln x-1}{x}\geq b$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立.

令 $t\left(x\right)=\dfrac{x\mathrm{e}^{x}+x-\ln x-1}{x}$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，

所以 $t'\left(x\right)=\dfrac{x^{2}\mathrm{e}^{x}+\ln x}{x^{2}}$，

令 $\varphi\left(x\right)=x^{2}\mathrm{e}^{x}+\ln x$，则 $\varphi\left(x\right)$ 是 $\left(0,+\infty\right)$ 上的增函数，

又因为 $\varphi\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}-2}-1<0$，$\varphi\left(1\right)=\mathrm{e}>0$，

所以 $\varphi\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上存在唯一的零点 x_0，即 $x_0^{2}\mathrm{e}^{x_0}+\ln x_0=0$，

由 $x_0^{2}e^{x_0}+\ln x_0=0$ 得 $x_0\mathrm{e}^{x_0}=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\cdot\ln\dfrac{1}{x_0}=\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)\cdot\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{x_0}}$，

又由函数 $q(x)=x\mathrm{e}^{x}$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，上式即 $q\left(x_0\right)=q\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)$

所以 $x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}=-\ln x_0$，$\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增，

所以 $t(x)_{\min}=t\left(x_0\right)=\dfrac{x_0\mathrm{e}^{x_0}+x_0-\ln x_0-1}{x_0}=\dfrac{1+x_0+x_0-1}{x_0}=2$，

所以 $b\le 2$.……………………………………………………………………12 分

21.解：（1）因为 $|AB|=|MN|$，所以点 O 到 AB 的距离等于点 O 到 MN 的距离，该距离等于 $\dfrac{p}{2}$，所以 $AB=2p$.

由 $|AB|=2\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\dfrac{p}{2})^2}=2p$ 解得 $p=2$，所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.………4 分

（2）由（1）可知准线 l 的方程为 $y=-1$，设点 $D(m,-1)$，$E(n,-1)$，$P(x_0,y_0)$

则直线 PD 的方程为 $(y+1)(x_0-m)=(x-m)(y_0+1)$，

整理得 $(y_0+1)x-(x_0-m)y-(x_0-m)-m(y_0+1)=0$.

因为直线 PD 和圆 O 相切，所以点 O 到直线 PD 的距离等于1，

即 $\dfrac{|x_0+my_0|}{\sqrt{(y_0+1)^2+(x_0-m)^2}}=1,$

整理得 $(y_0-1)m^2+2x_0m-(y_0+1)=0$，

同理有 $(y_0-1)n^2+2x_0n-(y_0+1)=0$，

因为 $y_0>1$，所以 m,n 是一元二次方程 $(y_0-1)x^2+2x_0x-(y_0+1)=0$ 的两个根，

则 $m+n=\dfrac{-2x_0}{y_0-1}$，$mn=\dfrac{-(y_0+1)}{y_0-1}$，

故 $|DE|=|m-n|=\sqrt{(m+n)^2-4mn}=\dfrac{\sqrt{4x_0^2+4y_0^2-4}}{y_0-1}$，又因为 $x_0^2=4y_0$，

所以 $|DE|=2\sqrt{\dfrac{y_0^2+4y_0-1}{(y_0-1)^2}}$.

因为点 P 到准线 l 的距离为 y_0+1,

所以 $S_{\triangle PDE}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{(y_0^2+4y_0-1)(y_0+1)^2}{(y_0-1)^2}}$ ……………………………………9 分

令 $y_0-1=t\ (t>0)$，则 $S_{\triangle PDE}=\sqrt{\frac{(t^2+6t+4)(t^2+4t+4)}{t^2}}=\sqrt{(t+\frac{4}{t}+6)(t+\frac{4}{t}+4)}$

因为 $t+\frac{4}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}=4$，

所以 $S_{\triangle PDE}\geq\sqrt{(4+6)\cdot(4+4)}=4\sqrt{5}$, 当且仅当 $t=2$ 时等号成立.

综上，$\triangle PDE$ 面积的最小值为 $4\sqrt{5}$.……………………………………12 分

二选一试题

22. 解：（1）因为曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta+2\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)，

故曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x=0$.

又 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，故曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. ……5 分

（2）设直线 l 的倾斜角为 α，则直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cdot\cos\alpha\\ y=1+t\cdot\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数),

代入 $(x-2)^2+y^2=4$ 得 $t^2+2(\sin\alpha-\cos\alpha)t-2=0$.

设点 P 对应的参数为 t_1，点 Q 对应的参数为 t_2，

则 $\begin{cases}t_1+t_2=-2(\sin\alpha-\cos\alpha)\\ t_1\cdot t_2=-2\end{cases}$ (*)，因为 $|PM|:|PQ|=2:3$，所以 $|t_1|=2|t_2|$，

所以 $t_1=-2t_2$，代入*式整理可得 $3\sin^2\alpha-8\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha=0$，

解得 $\tan\alpha=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$，所以直线 l 的斜率为 $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 或 $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$.………………10 分

23. 解：（1）原不等式为 $|x+1|+|x+4|\le 7$，

当 $x\le -4$ 时，$-x-1-x-4\le 7$，得 $x\ge -6$，所以 $-6\le x\le -4$；

当 $-4<x\le -1$ 时，$-x-1+x+4\le 7$ 恒成立，所以 $-4<x\le -1$；

当 $x>-1$ 时，$x+1+x+4\le 7$，得 $x\le 1$，所以 $-1<x\le 1$.

综上，不等式的解集为 $\{x\,|-6\le x\le 1\}$. ……………………………………5 分

（2）因为 m,n 为正实数，$(m^2+n)f(x)-mn\ge 0$ 即为 $f(x)\ge \dfrac{mn}{m^2+n}$

又 $\dfrac{m^2+n}{mn}=\dfrac{m}{n}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{m}{n}+\dfrac{3m+n}{m}=3+\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\ge 3+2\sqrt{\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{n}{m}}=5$，

当且仅当 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{n}{m}$ 时等号成立，即 $m=n=\dfrac{1}{4}$ 时等号成立，

所以 $\dfrac{mn}{m^2+n}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{5}$.

又因为 $f(x)\ge|x+4a-(x+a)|=|3a|$（当 $x=-a$ 时取等号），

要使 $f(x)\ge \dfrac{mn}{m^2+n}$ 恒成立，只需 $|3a|\ge \dfrac{1}{5}$.

所以 $a\le -\dfrac{1}{15}$ 或 $a\ge \dfrac{1}{15}$. ……………………………………10 分

以上解法仅供参考，如有其他方法，酌情给分。