答案

一、单选题

1、C　2、B　3、B　4、D　5、C　6、C　7、B　8、D

二、多选题

9、BCD　10、ABC　11、 BC　12、BC

四、填空题

13、28　14、27　15、36　16、$\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right]$.

答案详解

一、单选题

1.（1-1）已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-x-6\geq 0\}$，则 $M\cap N=$（　）

A．$\{-2,-1,0,1\}$　B．$\{0,1,2\}$　C．$\{-2\}$　D．2

【答案】C

【分析】方法一：由一元二次不等式的解法求出集合 N，即可根据交集的运算解出.

方法二：将集合 M 中的元素逐个代入不等式验证，即可解出.

【详解】方法一：因为 $N=\{x|x^2-x-6\geq 0\}=(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$，而 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，

所以 $M\cap N=\{-2\}$.

故选：C.

方法二：因为 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，将 $-2,-1,0,1,2$ 代入不等式 $x^2-x-6\geq 0$，只有 -2 使不等式成立，所以 $M\cap N=\{-2\}$.

故选：C.

2.（187-4）$\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中含 x^5 项的系数是（　）

A．-112　B．112　C．-28　D．28

【答案】B

【分析】根据题意，得到二项式的通项公式，代入计算即可得到结果.

【详解】由题意可得，其通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r=(-2)^r C_8^r x^{8-\frac{3}{2}r}, 0\leq r\leq 8, r\in\mathbf{N}$，

令 $8-\frac{3}{2}r=5$，可得 $r=2$，

所以含 x^5 项的系数是 $\left(-2\right)^2 C_8^2 = 112$

故选:B

3．（203-4）某单位为了了解办公楼用电量 y（度）与气温 x（°C）之间的关系，随机统计了四个工作日的用电量与当天平均气温，并制作了对照表：由表中数据得到线性回归方程 $y=-2x+a$，当气温为 -3°C 时，预测用电量为（　）

气温 x（°C）	18	13	10	－1
用电量 y（度）	24	34	38	64

A．68 度　　　　B．66 度　　　　C．28 度　　　　D．12 度

【答案】B

【分析】根据样本中心满足回归方程 $\hat{y}=-2x+\hat{a}$ 即可解决.

【详解】由表中数据可知 $\bar{x}=\dfrac{18+13+10-1}{4}=10$，$\bar{y}=\dfrac{24+34+38+64}{4}=40$，

所以回归方程 $\hat{y}=-2x+\hat{a}$ 过 $\left(10,40\right)$，得 $40=-2\times10+\hat{a}$，即 $\hat{a}=60$，

则回归方程为 $\hat{y}=-2x+60$，

当 $x=-3$ 时，$\hat{y}=-2\times\left(-3\right)+60=66$，

故选：B.

4．（185-4）某一天的课程表要排入语文、数学、英语、物理、化学、生物六门课，如果数学只能排在第一节或者最后一节，物理和化学必须排在相邻的两节，则共有（　）种不同的排法

A．24　　　　B．144　　　　C．48　　　　D．96

【答案】D

【分析】先安排数学，将物理和化学捆绑，与其余三门课程进行排序，结合分步乘法计数原理可得结果.

【详解】若数学只能排在第一节或者最后一节，则数学的排法有 2 种，

物理和化学必须排在相邻的两节，将物理和化学捆绑，

与语文、英语、生物三门课程进行排序，有 $A_2^2A_4^4=48$ 种排法.

由分步乘法计数原理可知，共有 $2\times48=96$ 种不同的排法.

故选：D.

5．(109-3)已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $1, E, F$ 是线段 B_1D_1 上的动点且 $EF=1$，则三棱锥 $A-BEF$ 的体积为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$　　D. 无法确定

【答案】C

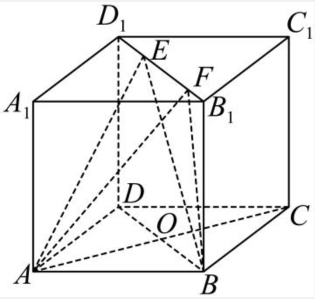
【分析】确定 $AO\perp$ 平面 BDD_1B_1，再计算体积得到答案.

【详解】如图所示：连接 AC 与 BD 交于点 O， $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$， $AO\subset$ 平面 $ABCD$，

故 $AO\perp BB_1$， $AO\perp BD$， $BD\cap BB_1=B$，故 $AO\perp$ 平面 BDD_1B_1.

$V_{A-BEF}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle BEF}\times AO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

故选：C



6.（195-4）若随机变量 X 服从两点分布，其中 $P\left(X=0\right)=\dfrac{1}{3}$， $E\left(X\right)$， $D\left(X\right)$ 分别为随机变量 X 的均值与方差，则下列结论不正确的是（　）

A. $P\left(X=1\right)=E\left(X\right)$　　B. $E\left(3X+2\right)=4$　　C. $D\left(3X+2\right)=4$　　D. $D\left(X\right)=\dfrac{2}{9}$

答案 C

【分析】根据随机变量 X 服从两点分布推出 $P(X=1)=\dfrac{2}{3}$，根据公式先计算出 $E\left(X\right)$、$D\left(X\right)$，由此分别计算四个选项得出结果.

【详解】随机变量 X 服从两点分布，其中 $P(X=0)=\dfrac{1}{3}$， $\therefore P(X=1)=\dfrac{2}{3}$，

$E(X)=0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$，

$D(X)=(0-\dfrac{2}{3})^2\times\dfrac{1}{3}+(1-\dfrac{2}{3})^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$，

在 A 中， $P(X=1)=E(X)$，故 A 正确；

在 B 中， $E(3X+2)=3E(X)+2=3\times\dfrac{2}{3}+2=4$，故 B 正确；

在 C 中， $D(3X+2)=9D(X)=9\times\dfrac{2}{9}=2$，故 C 错误；

在 D 中， $D(X)=\dfrac{2}{9}$，故 D 正确.

7（电子 4 -1）例 1　(2023·苏州质检)已知函数 $f(x)$ 在 R 上满足 $f(x)=f(-x)$，且当 $x\in(-\infty，0]$时，

$f(x)+xf'(x)<0$ 成立，若 $a=2^{0.6}\cdot f(2^{0.6})$，$b=\ln 2\cdot f(\ln 2)$，$c=\log_2\frac{1}{8}\cdot f\left(\log_2\frac{1}{8}\right)$，则 a，b，c 的大小关系是(　　)

A．$a>b>c$　　　　B．$c>b>a$

C．$a>c>b$　　　　D．$c>a>b$

答案　B

解析　因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(x)=f(-x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，

令 $g(x)=xf(x)$，则 $g(x)$ 是奇函数，$g'(x)=f(x)+x\cdot f'(x)$，

由题意知，当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$ 成立，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，

又 $g(x)$ 是奇函数，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

因为 $2^{0.6}>1,0<\ln 2<1$，$\log_2\frac{1}{8}=-3<0$，

所以 $\log_2\frac{1}{8}<0<\ln 2<1<2^{0.6}$，

又 $a=g(2^{0.6})$，$b=g(\ln 2)$，$c=g\left(\log_2\frac{1}{8}\right)$，

所以 $c>b>a$.

思维升华　(1)出现 $nf(x)+xf'(x)$ 形式，构造函数 $F(x)=x^nf(x)$；

8.（193-7）已知随机事件 A，B，C 满足 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$0<P(C)<1$，则下列说法错误的是（　）

A．不可能事件 Φ 与事件 A 互斥

B．必然事件 Ω 与事件 A 相互独立

C．$P(A|C)=P(AB|C)+P(A\overline{B}|C)$

D．若 $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$，则 $P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$

【答案】D

【分析】根据事件的概念，以及实践之间的关系，和条件概率的运算求解.

【详解】因为不可能事件 Φ 与事件 A 不会同时发生，所以互斥，A 正确；

因为 $P(\Omega)=1,P(A\Omega)=P(A),P(A)P(\Omega)=P(A)\times 1=P(A)$，

所以 $P(A\Omega)=P(A)P(\Omega)$，所以必然事件 Ω 与事件 A 相互独立，B 正确；

因为 $AB\cup A\overline{B}=A$，且 $AB,A\overline{B}$ 不会同时发生，

所以 $P(A|C)=P(AB|C)+P(A\overline{B}|C)$，C 正确；

例如，抛掷一枚骰子 1 次的试验，

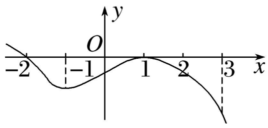
设事件 B 为出现点数小于等于 4，事件 A 为出现点数小于等于 2，

则 $P\left(A|B\right)=P\left(\overline{A}|B\right)$，但 $P(A)\neq P(\overline{A})$， D 错误，

故选:D.

二、多选题

9（电子 3-1） 1．(多选)已知函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的图象如图所示，则下列结论中正确的是(　　)



A．$f(x)$在区间$(-2,3)$上有 2 个极值点

B．$f'(x)$在 $x=-1$ 处取得极小值

C．$f(x)$在区间$(-2,3)$上单调递减

D．$f(x)$在 $x=0$ 处的切线斜率小于 0

答案　BCD

解析　根据 $f'(x)$的图象可得，在$(-2,3)$上，$f'(x)\leqslant 0$，∴$f(x)$在$(-2,3)$上单调递减，

∴$f(x)$在区间$(-2,3)$上没有极值点，故 A 错误，C 正确；

由 $f'(x)$的图象易知 B 正确；

根据 $f'(x)$的图象可得 $f'(0)<0$，即 $f(x)$在 $x=0$ 处的切线斜率小于 0，故 D 正确．

10．（13-7）设 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则下列结论正确的是（　）

A． ab 的最大值为$\frac{1}{4}$　　　　B． a^2+b^2 的最小值为$\frac{1}{2}$

C． $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为 9　　　　D． $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的最小值为$\sqrt{3}$

【答案】ABC

【分析】对于 AD，利用基本不等式判断即可；对于 B，利用不等式$(\frac{a+b}{2})^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$ 判断即可，对于 C，利用基本不等式“1”的妙用判断即可.

【详解】对于 A，因为 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，

则 $ab\leq(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号，故 A 正确；

对于 B，因为$(\frac{a+b}{2})^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$，

故 $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号，即 a^2+b^2 的最小值$\frac{1}{2}$，故 B 正确；

对于 C，$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{4}{a}+\frac{1}{b})(a+b)=5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geq 5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=9$，

当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$且$a+b=1$，即$b=\frac{1}{3}$，$a=\frac{2}{3}$时取等号，

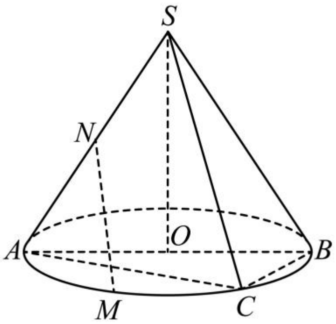
所以$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为9，故C正确；

对于D，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=1+2\sqrt{ab}\le 1+2\times\frac{1}{2}=2$，

故$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2}$，当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时取等号，即$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的最大值$\sqrt{2}$，故D错误.

故选：ABC.

11．（115-3）如图，AB为圆锥SO底面圆O的直径，点C是圆O上异于A，B的一点，N为SA的中点，则圆O上存在点M使（　）



A．$MN // SC$　　　　B．$MN//$平面SBC

C．$SM\perp AC$　　　　D．$AM\perp$平面SBC

【答案】BC

【分析】利用反证法的思想可判断AD不成立，通过面面平行可判断B，通过线面垂直可判断C.

【详解】假设存在点M使$MN//SC$，所以M,N,S,C四点共面，

又因为$A\in SN$，所以$A\in$面$MNSC$，

易得点A,M,C为面$MNSC$和面ABC的公共点，

所以A,M,C三点共线，与题意矛盾，

故不存在点M使$MN//SC$，即A错误；

过O作$OM//BC$，交劣弧AC与点M，连接ON，

由于N,O分别为SA,AB的中点，所以$ON//SB$，

由于$OM\not\subset$面SBC，$ON\not\subset$面SBC，所以$OM//$面SBC，$ON//$面SBC，

又因为$OM\cap ON=O$，所以面$OMN//$面SBC，

由于$MN\subset$面OMN，所以$MN//$面SBC，即B正确；

点M的位置同选项B，

由于AB为直径，所以$AC\perp BC$，即$AC\perp OM$，

由圆锥易得$SO\perp AC$，$SO\cap OM=O$，

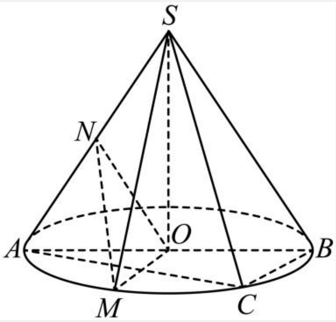
所以 $AC\perp$ 面 SOM，所以 $AC\perp SM$，即 C 正确；

假设在点 M 使 $AM\perp$ 面 SBC，所以 $AM\perp SB$，

又因为 $AM\perp SO$，$SO\cap SB=S$，所以 $AM\perp$ 面 SBO，

故面 SBC 应与面 SBO 平行，与题意显然不符，即 D 错误；

故选：BC.



12.（194-3）随着春节的临近，小王和小张等 4 位同学准备互相送祝福.他们每人写了一个祝福的贺卡，这四张贺卡收齐后让每人从中随机抽取一张作为收到的新春祝福，则（　）

A．小王和小张恰好互换了贺卡的概率为 $\frac{1}{6}$

B．已知小王抽到的是小张写的贺卡的条件下，小张抽到小王写的贺卡的概率为 $\frac{1}{3}$

C．恰有一个人抽到自己写的贺卡的概率为 $\frac{1}{3}$

D．每个人抽到的贺卡都不是自己写的概率为 $\frac{5}{8}$

【答案】BC

【分析】计算出四个人每人从中随机抽取一张共有 $C_4^1C_3^1C_2^1$ 种抽法，根据古典概型的概率公式以及条件概率的概率公式计算各选项，可得答案.

【详解】对于 A,四个人每人从中随机抽取一张共有 $C_4^1C_3^1C_2^1$ 种抽法，

其中小王和小张恰好互换了贺卡的抽法有 C_2^1 种，

故小王和小张恰好互换了贺卡的概率为 $\frac{C_2^1}{C_4^1C_3^1C_2^1}=\frac{1}{12}$ ，A 错误；

对于 B,设小王抽到的是小张写的贺卡为事件 A，则 $P(A)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_4^1C_3^1C_2^1}=\frac{1}{4}$,

小张抽到小王写的贺卡为事件 B,

则已知小王抽到的是小张写的贺卡的条件下，

小张抽到小王写的贺卡的概率为$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}$,B 正确；

对于 C, 恰有一个人抽到自己写的贺卡的抽法有$C_4^1\times 2$种，

故恰有一个人抽到自己写的贺卡的概率为$\dfrac{C_4^1\times 2}{C_4^1C_3^1C_2^1}=\dfrac{1}{3}$ ，C 正确；

对于 D, 每个人抽到的贺卡都不是自己写的抽法共有$C_3^1(1+2)=9$种，

故每个人抽到的贺卡都不是自己写的概率为$\dfrac{C_3^1(1+2)}{C_4^1C_3^1C_2^1}=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$，D 错误，

故选：BC

请点击修改第 II 卷的文字说明

四、填空题

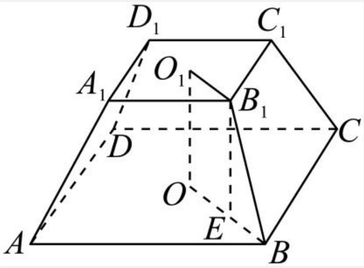
13．（109-2）正四棱台的上、下底面边长分别为 2，4，侧棱长为$\sqrt{11}$，则其体积为_________

【答案】28

【分析】根据正四棱台的性质，结合正四棱台的体积公式进行求解即可.

【详解】如图所示正四棱台中，OO_1是高，连接 OB,O_1B_1，设$B_1E\perp OB$，垂足为E，

显然$OB=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2}=2\sqrt{2},O_1B_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$



所以该正四棱台的高为$OO_1=B_1E=\sqrt{11-(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=3$，

正四棱台的体积$V=\dfrac{1}{3}\times\left(2^2+2\times4+4^2\right)\times3=28$.

14．某学校组织 1200 名学生进行“防疫知识测试”．测试后统计分析如下：学生的平均成绩为$\bar{x}$=80，方差为$s^2=25$.学校要对成绩不低于 90 分的学生进行表彰.假设学生的测试成绩X近似服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$（其中$\mu$近似为平均数$\bar{x}$，$\sigma^2$近似为方差$s^2$，则估计获表彰的学生人数为___________．（四舍五入，保留整数）

参考数据：随机变量X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则$P\left(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\right)=0.6827$，

$P\left(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\right)=0.9545$，$P\left(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\right)=0.9973$．

【答案】27

【分析】根据题意得到$\mu=80,\sigma=5,\mu+2\sigma=90$，结合$3\sigma$原则和正态分布的对称性求出$P(X>90)=0.02275$，求出获得表彰的学生人数.

【详解】由题意得：$\mu=80,\sigma=5,\mu+2\sigma=90$，

故$P(X>90)=P(X>\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times0.9545=0.02275$，

所以$1200\times0.02275\approx27$．

故答案为：27.

15．毛泽东思想是党的重要思想，某学校在团员活动中将四卷不同的《毛泽东选集》分发给三名同学，每个人至少分发一本，一共有___________种分发方法.

【答案】36

【分析】先将《毛泽东选集》按“2+1+1”形式进行分组，再分配给 3 名同学.

【详解】解：根据题意，只能 1 人拿 2 本，另 2 人各拿 1 本，故先将四卷不同的《毛泽东选集》按“2+1+1”形式分为 3 组，有$\frac{C_4^2C_2^1}{A_2^2}=6$种分组方法，

再将分好的 3 组分配给三名同学，有$A_3^3=6$种情况，

则由分步计数原理可知一共有$6\times6=36$种分发方法；

故答案为：36.

16、(电子 3-例 3 跟踪 2)(2)(2022·哈师大附中模拟)已知函数$f(x)=\frac{e^x}{x^2}+2k\ln x-kx$，若 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的唯一极值点，则实数 k 的取值范围是__________

$\left[-\infty,\ \frac{e^2}{4}\right]$

解析　由题意，$f(x)=\frac{e^x}{x^2}+2k\ln x-kx(x>0)$，

$f'(x)=\frac{x-2}{x}\cdot\left(\frac{e^x}{x^2}-k\right)$，

令$f'(x)=0$得$x=2$或$k=\frac{e^x}{x^2}$，

令$\varphi(x)=\frac{e^x}{x^2}(x>0)$，

$\therefore\varphi'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$，

$\therefore\varphi(x)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2，+\infty)$上单调递增，

$\therefore \varphi(x)_{\min}=\varphi(2)=\frac{e^2}{4}$,

又当 $x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to+\infty$，

$\therefore$若$\varphi(x)=k$ 无实数根，则 $k<\frac{e^2}{4}$，

$\because$当 $k=\frac{e^2}{4}$时，$\varphi(x)=k$ 的解为 $x=2$，

$\therefore$实数 k 的取值范围是$\left(-\infty,\ \frac{e^2}{4}\right]$.

三、解答题

17. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{4}\le 2^x\le 32\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x^2-4x+4-m^2\le 0,m\in\mathbf{R}\right.\right\}$.

（1）若 $m=3$，求 $A\cup B$；

（2）若存在正实数 m，使得"$x\in A$"是"$x\in B$"成立的__________，求正实数 m 的取值范围.

从"①充分不必要条件，②必要不充分条件"中任选一个，填在上面空格处，补充完整该问题，并进行作答.

【答案】（1）$A\cup B=[-2,5]$

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）分别求解两个集合，再求并集；

（2）若选①，则 A 是 B 的真子集．若选②，则 B 是 A 的真子集, 根据集合的包含关系，列不等式，即可求解 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

$$A=\left\{x\left|\frac{1}{4}\le 2^x\le 32\right.\right\}=[-2,5]$$

因 $m>0$，则 $B=\left\{x\left|\left[x-(2-m)\right]\left[x-(2+m)\right]\le 0,m\in R\right.\right\}=\left[2-m,2+m\right]$.

当 $m=3$ 时，$B=[-1,5]$，所以 $A\cup B=[-2,5]$.

【小问 2 详解】

选①　因"$x\in A$"是"$x\in B$"成立的充分不必要条件，则 A 是 B 的真子集.

所以$\begin{cases}m>0\\2-m\le -2\\2+m\ge 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>0\\m\ge 4\\m\ge 3\end{cases}\Rightarrow m\in\left[4,+\infty\right)$. 经检验"="满足.

所以实数 m 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

选② 因为“$x\in A$”是“$x\in B$”成立的必要不充分条件

所以 B 是 A 的真子集.

所以 $\begin{cases} m>0 \\ 2-m\geq -2 \\ 2+m\leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\leq 4 \\ m\leq 3 \end{cases} \Rightarrow m\in(0,3]$，经检验“=”满足.

所以实数 m 的取值范围是 $(0,3]$.

18．(电子 2-9)已知函数 $f(x)=ae^x-x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线方程；

(2)试讨论函数 $f(x)$的单调性.

解 (1)因为 $a=1$，

所以 $f(x)=e^x-x$，则 $f'(x)=e^x-1$，

所以 $f'(1)=e-1$，$f(1)=e-1$，

所以曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线方程是 $y-(e-1)=(e-1)(x-1)$，

即 $y=(e-1)x$.

(2)因为 $f(x)=ae^x-x$，$a\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $f'(x)=ae^x-1$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=ae^x-1<0$，则 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\ln a$，

当 $x<-\ln a$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>-\ln a$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，-\ln a)$上单调递减，

在$(-\ln a，+\infty)$上单调递增，

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(-\infty，-\ln a)$上单调递减，在$(-\ln a，+\infty)$上单调递增.

19．某大学“爱牙协会”为了解“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”情况之间的关系，随机对 200 名青少年展开了调查，得知这 200 个人中共有 120 个人“有蛀牙”，其中“不爱吃甜食”且“有蛀牙”的有 30 人，“不爱吃甜食”且“无蛀牙”的有 50 人.有 2×2 列联表：

	有蛀牙	无蛀牙	总计
爱吃甜食			

不爱吃甜食			
总计			

(1)根据已知条件完成如图所给的2×2列联表，并判断是否有99.5%的把握认为“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”有关；

(2)若从“无蛀牙”的青少年中用分层抽样的方法随机抽取8人作进一步调查，再从这抽取的8人中随机抽取2人去担任“爱牙宣传志愿者”，求抽取的2人都是“不爱吃甜食”且“无蛀牙”的青少年的概率.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k)$	0.05	0.01	0.005
k	3.841	6.635	7.879

【答案】(1)见解析

(2)$\dfrac{5}{14}$

【分析】（1）根据已知条件，结合独立性检验公式，即可求解；

（2）根据已知条件，结合分层抽样的定义，列举法，以及古典概型的概率公式，即可求解.

【详解】（1）由题意可知，2×2列联表：

	有蛀牙	无蛀牙	总计
爱吃甜食	90	30	120
不爱吃甜食	30	50	80
总计	120	80	200

$\because K^2=\dfrac{200\times(90\times50-30\times30)^2}{120\times80\times120\times80}=28.125>7.879$ $\therefore$有99.5%的把握认为“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”有关；

（2）若从“无蛀牙”的青少年中用分层抽样的方法随机抽取8人作进一步调查，则爱吃甜食占3人，设为x,y,z，不爱吃甜食占5人，设为a,b,c,d,e，

从中随机选取2人，所有情况为：$\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,a\},\{x,b\},\{x,c\},\{x,d\},\{x,e\}$，

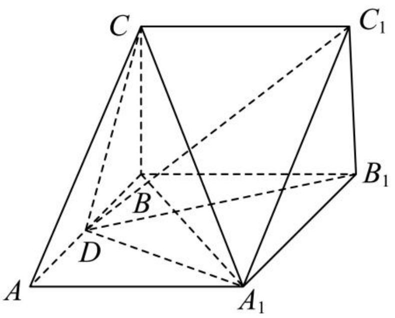
$\{y,a\},\{y,b\},\{y,c\},\{y,d\},\{y,e\},\{z,a\},\{z,b\},\{z,c\},\{z,d\},\{z,e\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\}$

$\{b,d\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\}$，共28种，其中抽取的2人都是“不爱吃甜食”且“无蛀牙”的青少年为：

$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\}$，共 10 种，

故抽取的 2 人都是“不爱吃甜食”且“无蛀牙”的青少年的概率为 $P=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$.

20．(134-9)如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，D 为线段 AB 的中点，$CB=4$，$AB=4\sqrt{3}$，$A_1C_1=8$，三棱锥 $A-A_1DC$ 的体积为 8.



(1)证明：$A_1D\perp$ 平面 B_1C_1D；

(2)求平面 A_1CD 与平面 A_1BC 夹角的余弦值.

【答案】(1)见解析

(2) $\frac{6\sqrt{55}}{55}$

【分析】（1）证明出 $B_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，利用线面垂直的性质可证得 $C_1B_1\perp A_1D$，再由三棱锥 $A-A_1DC$ 的体积为 8，求出 $AA_1=2\sqrt{3}$，可证得 $A_1D\perp B_1D$，再由线面垂直的判定定理即可证明；

（2）以点 B 为坐标原点，BA、BB_1、BC 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可求得平面 DA_1C 与平面 A_1CB 夹角的余弦值.

【详解】（1）证明：因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$CB\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp BC$，

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1C_1C 为平行四边形，则 $AC=A_1C_1=8$，

因为 $AB=4\sqrt{3}$，$CB=4$，所以 $AB^2+CB^2=AC^2$，所以 $CB\perp AB$，

又因为 $AB\cap AA_1=A$，$AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，$AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1，因为 $CB//C_1B_1$，所以 $C_1B_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，

又 $A_1D\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $C_1B_1\perp A_1D$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=8\sqrt{3}$，

$\because D$为AB的中点，则$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=4\sqrt{3}$，

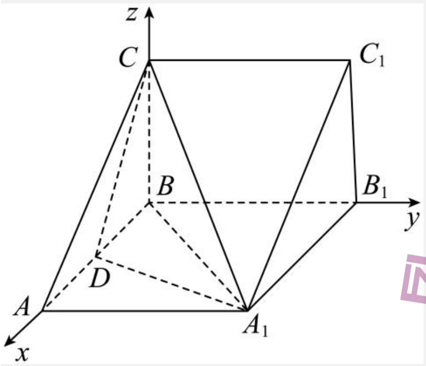
因为$AA_1\perp$平面ABC，$V_{A-A_1CD}=V_{A_1-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times4\sqrt{3}\times AA_1=8$，

所以$AA_1=2\sqrt{3}$，所以在$\triangle A_1DB_1$中，$A_1D=B_1D=2\sqrt{6}$，$A_1B_1=4\sqrt{3}$，

所以$A_1D^2+B_1D^2=A_1B_1{}^2$，所以$A_1D\perp B_1D$，$C_1B_1\cap B_1D=B_1$，

$C_1B_1,B_1D\subset$平面B_1C_1D，所以$A_1D\perp$平面B_1C_1D；

（2）因为$BB_1\perp$平面ABC，$BC\perp AB$，以点B为坐标原点，BA、BB_1、BC所在直线分别为x、y、z轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则$C(0,0,4)$、$D(2\sqrt{3},0,0)$、$A_1(4\sqrt{3},2\sqrt{3},0)$、$B_1(0,2\sqrt{3},0)$，

设平面DA_1C的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{DA_1}=(2\sqrt{3},2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DC}=(-2\sqrt{3},0,4)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DA_1}=2\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=-2\sqrt{3}x_1+4z_1=0\end{cases}$，取$x_1=2$，可得$\vec{m}=(2,-2,\sqrt{3})$，

设平面A_1CB的法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{BA_1}=(4\sqrt{3},2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,0,4)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=4\sqrt{3}x_2+2\sqrt{3}y_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=4z_2=0\end{cases}$，取$x_2=1$，可得$\vec{n}=(1,-2,0)$，

所以，$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{6}{\sqrt{11}\times\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{55}}{55}$，

所以平面DA_1C与平面A_1CB夹角的余弦值为$\frac{6\sqrt{55}}{55}$.

21．(209-10)某篮球队为提高队员训练的积极性，进行小组投篮游戏；每个小组由两名队员组成，队员甲与队员乙组成一个小组．游戏规则如下：每个小组的两名队员在每轮游戏中分别投篮两次，每小组投进的次数之和不少于 3 次的称为“神投小组”，已知甲乙两名队员投进篮球的概率分别为 p_1，p_2.

(1)若 $p_1=\frac{1}{2}$， $p_2=\frac{2}{3}$，求他们在第一轮游戏获得“神投小组”称号的概率；

(2)已知 $p_1+p_2=\frac{6}{5}$，则：

① p_1,p_2 取何值时能使得甲、乙两名队员在一轮游戏中获得“神投小组”称号的概率最大？并求出此时的最大概率；

②在第①问的前提下，若甲、乙两名队员想要获得 297 次“神投小组”的称号，则他们平均要进行多少轮游戏？

【答案】(1) $\frac{4}{9}$

(2)①当 $p_1=p_2=\frac{3}{5}$ 时，最大概率为 $\frac{297}{625}$；②625

【分析】(1）先罗列出“神投小组”的可能情况，然后利用独立事件的乘法公式进行求概率即可；

（2）①先求出获得“神投小组”称号的概率，结合 $p_1+p_2=\frac{6}{5}$ 可得 $p=\frac{12}{5}p_1p_2-3p_2^2\cdot p_1^2$, 令 $m=p_1p_2$，$m\in\left[\frac{1}{5},\frac{9}{25}\right]$，利用二次函数的性质即可求解；②利用二项分布的知识即可求解

【详解】(1）每小组投进的次数之和不少于 3 次的称为“神投小组”,则可能的情况有①甲投中一次,乙投中两次;②甲投中两次,乙投中一次;③甲投中两次,乙投中两次,

$\because p_1=\frac{1}{2},p_2=\frac{2}{3}$,

$\therefore$ 他们在第一轮游戏获得“神投小组”称号的概率为 $C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

（2）①由题意得他们在一轮游戏获得“神投小组”称号的概率

$p=C_2^1\cdot p_1\left(1-p_1\right)p_2^2+p_1^2C_2^1\cdot p_2\left(1-p_2\right)+p_1^2\cdot p_2^2=2p_1p_2\left(p_1+p_2\right)-3p_2^2\cdot p_1^2$,

$\because p_1+p_2=\frac{6}{5}$， $\therefore p=\frac{12}{5}p_1p_2-3p_2^2\cdot p_1^2$,

又 $0\le p_1\le 1,0\le p_2\le 1,p_1+p_2=\frac{6}{5}$,则 $\frac{1}{5}\le p_1\le 1$,

令 $m=p_1p_2=-p_1^2+\frac{6}{5}p_1=-\left(p_1-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{25}$,则 $m\in\left[\frac{1}{5},\frac{9}{25}\right]$,

$\therefore p = y(m) = -3m^2 + \frac{12}{5}m = -3\left(m - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{12}{25}$,

$\because p = -3m^2 + \frac{12}{5}m$在$\left[\frac{1}{5}, \frac{9}{25}\right]$上单调递增,则 $p_{\max} = y\left(\frac{9}{25}\right) = \frac{297}{625}$,

此时 $p_1 = p_2 = \frac{3}{5}$.

②他们小组在n轮游戏中获得"神投小组"称号的次数ξ满足$\xi \sim B\left(n, \frac{297}{625}\right)$,

$\because np = 297$,则$n = \frac{297}{\frac{297}{625}} = 625$,

$\therefore$平均要进行 625 轮游戏.

22．已知函数$f\left(x\right) = a\ln x + \frac{1}{2}x^2 - \left(a+1\right)x\ \left(a > 0\right)$.

(1)讨论函数$f\left(x\right)$的单调性;

(2)设函数$g\left(x\right) = \left(3-a\right)x - f\left(x\right)$有两个极值点$x_1$，$x_2\left(x_1 < x_2\right)$.

（i）求实数a的取值范围;

（ii）证明：$g\left(x_1\right) + g\left(x_2\right) < 10 - \ln a$.

【答案】(1)答案见解析;

(2)（i）$0 < a < 4$，（ii）证明见解析.

【分析】(1）由题设$f'\left(x\right) = \frac{\left(x-1\right)\left(x-a\right)}{x}$且$x \in \left(0, +\infty\right)$，讨论$1, a$研究导数的符号，即可确定函数单调性;

（2）（i）将问题转化为$x^2 - 4x + a = 0$在$\left(0, +\infty\right)$上有两个不等实根，结合对应二次函数性质求参数范围;

（ii）由（i）并应用韦达定理得$g\left(x_1\right) + g\left(x_2\right) = a - a\ln a + 8$，分析法转化为$m\left(a\right) = \left(1-a\right)\ln a + a - 2 < 0$在$a \in \left(0, 4\right)$上恒成立，利用导数研究单调性并确定值域范围，即可证结论.

【详解】(1）由$f(x)$定义域为$x \in \left(0, +\infty\right)$，且$f'\left(x\right) = \frac{a}{x} + x - \left(a+1\right) = \frac{x^2 - \left(a+1\right)x + a}{x} = \frac{\left(x-1\right)\left(x-a\right)}{x}$,

令$f'\left(x\right) = 0$得，$x = 1$或$x = a$,

①当$0 < a < 1$时，$x \in \left(0, a\right)$，$f'(x) > 0$，$f\left(x\right)$单调递增,

$x \in \left(a, 1\right)$，$f'(x) < 0$，$f\left(x\right)$单调递减,

$x\in(1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

②当$a=1$时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

③当$a>1$时，$x\in(0,1)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

$x\in(1,a)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

$x\in(a,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

综上：

当$0<a<1$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,a)$、$(1,+\infty)$，$f(x)$的单调递减区间为$(a,1)$；

当$a=1$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$；

当$a>1$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$、$(a,+\infty)$，$f(x)$的单调递减区间为$(1,a)$.

（2）（i）由已知，$g(x)=4x-a\ln x-\dfrac{1}{2}x^2$，则$g'(x)=4-\dfrac{a}{x}-x=\dfrac{4x-a-x^2}{x}=-\dfrac{x^2-4x+a}{x}$，

函数$g(x)$有两个极值点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，即$x^2-4x+a=0$在$(0,+\infty)$上有两个不等实根，

令$h(x)=x^2-4x+a$，只需$\begin{cases}h(0)=a>0\\h(2)=a-4<0\end{cases}$，故$0<a<4$，

（ii）由（i）知，$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=a$，且$0<a<4$，

$g(x_1)+g(x_2)=\left(4x_1-a\ln x_1-\dfrac{1}{2}x_1^2\right)+\left(4x_2-a\ln x_2-\dfrac{1}{2}x_2^2\right)$

$=4(x_1+x_2)-a(\ln x_1+\ln x_2)-\dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=a-a\ln a+8$，

要证$g(x_1)+g(x_2)<10-\ln a$，即证$a-a\ln a+8<10-\ln a$，只需证$(1-a)\ln a+a-2<0$，

令$m(a)=(1-a)\ln a+a-2$，$a\in(0,4)$，则$m'(a)=-\ln a+\dfrac{1-a}{a}+1=\dfrac{1}{a}-\ln a$，

因为$m''(a)=-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a}<0$恒成立，所以$m'(a)$在$a\in(0,4)$上单调递减，

又$m'(1)=1>0$，$m'(2)=\dfrac{1}{2}-\ln 2<0$，

由零点存在性定理得，$\exists a_0\in(1,2)$使得$m'(a_0)=0$，即$\ln a_0=\dfrac{1}{a_0}$，

所以$a\in(0,a_0)$时，$m'(a)>0$，$m(a)$单调递增，

$a\in(a_0,4)$时，$m'(a)<0$，$m(a)$单调递减，

则$m(a)_{\max}=m(a_0)=(1-a_0)\ln a_0+a_0-2=(1-a_0)\dfrac{1}{a_0}+a_0-2=a_0+\dfrac{1}{a_0}-3$，

$\because y=a_0+\dfrac{1}{a_0}-3$ 在 $a_0\in(1,2)$ 上显然单调递增，

$\therefore a_0+\dfrac{1}{a_0}-3<2+\dfrac{1}{2}-3=-\dfrac{1}{2}<0$，

$\therefore m(a)<0$，即 $g(x_1)+g(x_2)<10-\ln a$，得证.

【点睛】关键点点睛：第二问二小问，由 $g(x_1)+g(x_2)=a-a\ln a+8$，综合应用分析法、函数思想转化为证明 $m(a)<0$ 在 $a\in(0,4)$ 上恒成立，再利用导数研究单调性判断即可.