2020 年第三届刘徽杯数学竞赛试题

目录

第一天试题

第三届“刘徽杯”数学竞赛

第一天 (2020 年 10 月 31 日)

第 1 题 平面上有两个半径不相等的圆. 当两个动点 A, B 分别沿两圆按逆时针方向作相同角速度的运动时, 求证:

(1) 平面上存在一个定点 P, 使得 $\triangle PAB$ 的形状始终保持不变 (即所有的 $\triangle PAB$ 都相似);

(2) 平面上存在一个定点 Q, 使得 $\triangle QAB$ 的面积始终保持不变.

第 2 题 设 n 是大于 1 的正整数, $N = n(n+1)/2$. 求使得不等式

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i\right)^{-1/2} \geq 1 + \lambda \prod_{i=1}^{N}(1 - a_i)$$

对一切 $a_1, a_2, \ldots, a_N \in [0,1]$ 恒成立的 λ 的最大值.

第 3 题 设整数 n, m, k, h 满足 $1 \leq n \leq m$, $1 \leq k \leq n$, 以及 $1 \leq h \leq m$. 将互不重合的 n 个红点和 m 个蓝点排列在一条直线上. 证明: 不论这 $n+m$ 个点的次序如何, 在该直线上总存在一段恰含有 k 个红点及 h 个蓝点的线段的充分必要条件是

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor + 1\right) \cdot (h-1) < m < \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor \cdot (h+1),$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数, 且当 $k=1$ 时上述不等式最右边的一项理解为 $+\infty$.

第二天试题

第三届“刘徽杯”数学竞赛

第二天 (2020 年 11 月 1 日)

第 4 题 证明: 对正数 a, b, c, d 有

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+d)^3+(d+a)^3 \geq 8(a^2b+b^2c+c^2d+d^2a).$$

第 5 题 给定正整数 $n>2$, 设集合

$$\mathcal{S}=\{x^n+2021y^n: x, y \text{ 是正整数}\}.$$

证明: 对任意的正整数 k, 都存在正整数 m_k, 使得对任意的正整数 $c>m_k$, 都存在 c 个连续的正整数, 其中恰有 k 个数属于 $\mathcal{S}$.

第 6 题 对正整数 $k>1$, 记 $f(k)$ 为将 k 分解为大于 1 的正整数之积的分解方法数 (不计乘积中因子的次序). 例如 $f(12)=4$, 因为 12 有如下 4 种分解: 12, 2×6, 3×4, $2\times2\times3$.

若 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$, 其中 $p_1, p_2, \ldots, p_k$ 是不同的素数, $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 是正整数, 且 $m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_k$. 证明:

$$f(n)\leq\alpha^{m_1}\beta^{m_2}(\beta+1)^{m_3}\cdots(\beta+k-2)^{m_k},$$

其中 $\alpha=(\sqrt{5}+1)/2$, $\beta=(2\alpha-1)/(\alpha-1)$.

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和

微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。