2022—2023 学年(下)高三顶尖计划联考

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 D

命题意图 本题考查集合的表示与运算.

解析 由$(x+2)(x-7)\leqslant 0$,得$-2\leqslant x\leqslant 7$,由$\log_3 x>1$,得$x>3$,所以$A\cap B=\{4,5,6,7\}$.

2. 答案 C

命题意图 本题考查复数的基本运算.

解析 设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则$\bar{z}=a-bi$. 因为$z-2\bar{z}=1+6i$,所以$-a+3bi=1+6i$,所以$a=-1,b=2$,所以z的虚部为 2.

3. 答案 B

命题意图 本题考查圆与圆的位置关系.

解析 将$x^2+(y-2)^2=5$和$(x+2)^2+y^2=5$相减得直线$AB:y=-x$,点$(0,2)$到直线$x+y=0$的距离$d=\sqrt{2}$,所以$|AB|=2\sqrt{5-2}=2\sqrt{3}$.

4. 答案 A

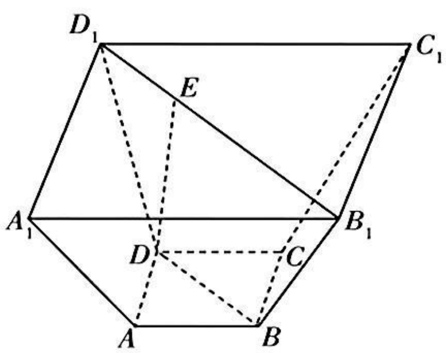
命题意图 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 因为$\tan\alpha=-7$,所以$\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=-\dfrac{4}{3}$.

5. 答案 C

命题意图 本题考查四棱台的体积计算.

解析 画出满足题意的正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,如图所示,则$B_1D_1=40\sqrt{2}$,$BD=10\sqrt{2}$. 过点D作$DE\perp B_1D_1$于点E,则$D_1E=15\sqrt{2}$,$DE=\sqrt{30^2-(15\sqrt{2})^2}=15\sqrt{2}$,所以该正四棱台的体积为$V=\dfrac{1}{3}(40^2+10^2+10\times 40)\times 15\sqrt{2}=10\ 500\sqrt{2}(\text{cm}^3)$.



6. 答案 B

命题意图 本题考查等比数列的基本性质.

解析 设$\{a_n\}$的公比为q,则$a_3+a_4+a_5+a_6=q^2(a_1+a_2+a_3+a_4)$,得$q^2=2$,所以$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times 2^5=64$.

7. **答案** D

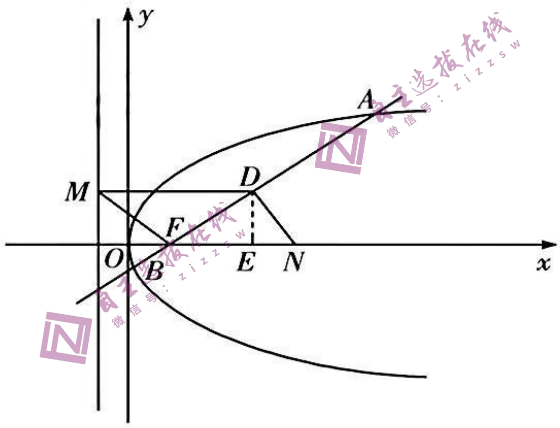
命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 设直线$y=x+a$与函数$f(x)$和$g(x)$的图象分别相切于点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则由$f(x)=e^x$,得$f'(x)=e^x$,令$e^{x_1}=1$,得$x_1=0$,$y_1=1$,将$(0,1)$代入$y=x+a$中得$a=1$,由$g(x)=\ln x+b$,得$g'(x)=\frac{1}{x}$,令$\frac{1}{x_2}=1$,得$x_2=1$,$y_2=b$,将$(1,b)$代入$y=x+1$中得$b=2$,所以$a+b=3$.

8. **答案** A

命题意图 本题考查抛物线的性质.

解析 由题意知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,直线$AB$的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$.设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$D(x_0,y_0)$,由$\begin{cases}y^2=2px,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right),\end{cases}$得$y^2-2\sqrt{3}py-p^2=0$,所以$y_1+y_2=2\sqrt{3}p$,所以$y_0=\sqrt{3}p$,由$y_0=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x_0-\frac{p}{2}\right)$,得$x_0=\frac{7p}{2}$.如图所示,作$DE\perp x$轴于点$E$,则$|DE|=\sqrt{3}p$.因为$DN\perp DF$,$\angle DFN=30°$,故$|EF|=3p$,$|EN|=p$,所以$|DM|=x_0+\frac{p}{2}=4p$,$|FN|=4p$,又$FN/\!/DM$,得四边形$DMFN$为平行四边形.所以其面积为$4p\times\sqrt{3}p=32\sqrt{3}$,解得$p=2\sqrt{2}$.



二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. **答案** BC

命题意图 本题考查二项式定理的应用.

解析 $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$的展开式中共有10项,由二项式系数的性质可得展开式中的第5项和第6项的二项式系数相等,故A错误;由已知可得二项式系数之和为2^9,且展开式中奇数项的二项式系数和与偶数项的二项式系数和相等,所以奇数项的二项式系数和为$2^8=256$,故B正确;展开式的通项为$T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_9^r x^{9-\frac{3}{2}r}$($0\leqslant r\leqslant 9$,$r\in\mathbf{N}$),令$9-\frac{3}{2}r=0$,解得$r=6$,故常数项为$C_9^6=C_9^3=84$,故C正确;有理项中$x$的指数为整数,故$r=0$,2,4,6,8,故有理项有5项,故D错误.

10. **答案** ABC

命题意图 本题考查基本不等式的应用.

解析 对于A,因为$2\sqrt{4ab}\leqslant a+4b=2$,所以$ab\leqslant\frac{1}{4}$,故A正确;

对于B,$2^a+16^b\geqslant 2\sqrt{2^a\cdot 16^b}=2\sqrt{2^{a+4b}}=4$,故B正确;

对于C,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(a+4b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{4b}{a}}\right)=\frac{9}{2}$,故C正确;

对于D,$(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2=a+4b+4\sqrt{ab}\leqslant 4$,所以$\sqrt{a}+2\sqrt{b}\leqslant 2$,故D错误.

11. **答案** BD

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 因为函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$在$\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$上单调,所以$f(x)$的最小正周期$T$满足$\frac{T}{2}\geqslant\frac{3\pi}{2}$,即$\frac{\pi}{\omega}\geqslant\frac{3\pi}{2}$,所以$0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$,因为$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$对称,所以$-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$\omega=\frac{1}{2}-3k,k\in\mathbf{Z}$,所以当$k=0$时,$\omega=\frac{1}{2}$,所以$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$,故A错误;当$x=\frac{2\pi}{3}$时,$\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}=\pi$,故B正确;将$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得$g(x)=\cos\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]=-\sin\frac{1}{2}x$的图象,$g(x)$为奇函数,不是偶函数,故C错误;令$t=\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}$,当$x\in[0,\pi]$时,$t\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$,直线$y=-\frac{9}{10}$与$y=\cos t$的图象在$\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$上有两个交点,故D正确.

12. **答案** ACD

命题意图 本题考查立体几何的综合问题.

解析 对于A,因为平面AA_1D_1D//平面BB_1C_1C,根据面面平行的性质,平面α与这两个平面的交线互相平行,即D_1F//BE,所以D_1F//平面ABE,所以三棱锥$P-ABE$的体积为定值,故A正确.

对于B,若存在点P,使得$DP\perp\alpha$,则$DP\perp BF$,因为$DD_1\perp BF$,$DD_1\cap DP=D$,所以$BF\perp$平面AA_1D_1D,与题意矛盾,故B错误.

对于C,如图1所示,取BC的中点Q,连接C_1Q,则点P在平面BCC_1B_1内的射影P'在C_1Q上,直线PE与平面BCC_1B_1所成角即$\angle PEP'$,$\tan\angle PEP'=\frac{PP'}{EP'}$,由已知可得$PP'=2$,$EP'$最小为$\sqrt{2}$,所以$\tan\angle PEP'$的最大值为$\sqrt{2}$,故C正确.

对于D,如图2,取A_1D_1的中点G,连接AG,分别取BE,AG的中点O_1,O_2,连接O_1O_2,因为$\triangle BB_1E$是等腰直角三角形,所以三棱锥$P-BB_1E$外接球的球心O在直线O_1O_2上.设三棱锥$P-BB_1E$外接球的半径为R,则$OB=OP=R$,所以$OO_1^2+O_1B^2=OO_2^2+O_2P^2$.设$OO_1=d$,则$d^2+2=(2-d)^2+O_2P^2$,所以$d=\frac{1}{2}+\frac{O_2P^2}{4}$.当点$P$与$F$重合时,$O_2P$取最小值$\sqrt{2}$,此时$d=1$,$R^2=3$,三棱锥$P-BB_1E$外接球的表面积为$4\pi R^2=12\pi$,当点$P$与$D_1$重合时,$O_2P$取最大值$\sqrt{10}$,此时$d=3$,$R^2=11$,三棱锥$P-BB_1E$外接球的表面积为$4\pi R^2=44\pi$,故D正确.

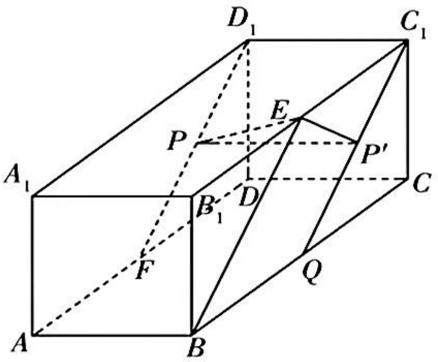


图 1

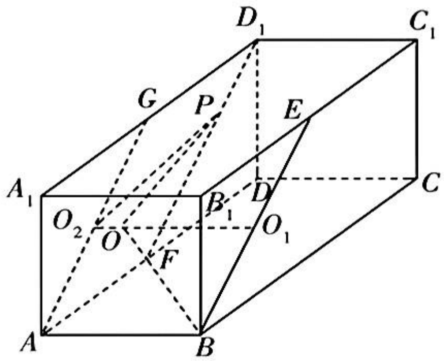


图 2

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案**　$\pm 4\sqrt{3}$

命题意图　本题考查双曲线的性质.

解析　由题意知 $F(4,0)$，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$ 或 $y=-\sqrt{3}x$，因为直线 AF 与 C 只有一个交点，所以直线 AF 与 C 的渐近线平行，即 $-\frac{m}{4}=\sqrt{3}$ 或 $-\frac{m}{4}=-\sqrt{3}$，得 $m=\pm 4\sqrt{3}$.

14. **答案**　6

命题意图　本题考查平面向量的运算.

解析　设 $|\boldsymbol{a}|=t$，由已知可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=t$，$\boldsymbol{b}\cdot\left(\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}\right)=t-6=0$，即 $t=6$，所以 $|\boldsymbol{a}|=6$.

15. **答案**　$\frac{9}{10}$

命题意图　本题考查概率的乘法公式的应用.

解析　设 A_i 表示第 i 次通过进货检验，B_i 表示第 i 次通过生产过程检验（$i=1,2$），C 表示该产品能进入出货检验环节，由题意得 $P(C)=P(A_1B_1+\overline{A}_1A_2B_1+A_1\overline{B}_1B_2+\overline{A}_1A_2\overline{B}_1B_2)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{10}$.

16. **答案**　248

命题意图　本题考查抽象函数问题.

解析　因为 $g(x-1)$ 是偶函数，所以 $g(-x-1)=g(x-1)$，用 $x-1$ 替换 x，得 $g(-x)=g(x-2)$. 条件 $f(x-1)-g(-x)=1$ 转化为 $f(x-1)-g(x-2)=1$，所以 $\begin{cases}f(x+1)+g(x-2)=3①,\\ f(x-1)-g(x-2)=1②,\end{cases}$ ①+②得 $f(x+1)+f(x-1)=4$. 在②中用 $x+2$ 替换 x，得 $f(x+1)-g(x)=1$③，则①－③得 $g(x-2)+g(x)=2$. 则 $\sum\limits_{k=1}^{83}f(k)=41\times 4+f(2)=164+f(2)$，$\sum\limits_{k=1}^{83}g(k)=41\times 2+g(2)=82+g(2)$. 在①中令 $x=1$，可得 $f(2)+g(-1)=3$，所以 $f(2)=1$. 在 $g(-x-1)=g(x-1)$ 中令 $x=1$，得 $g(-2)=g(0)$，又 $g(-2)+g(0)=2$，所以 $g(0)=1$，再由 $g(0)+g(2)=2$ 知 $g(2)=1$. 所以 $\sum\limits_{k=1}^{83}[f(k)+g(k)]=164+82+f(2)+g(2)=248$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题考查等差数列的概念和数列求和方法的应用.

解析　（Ⅰ）因为 $S_n=na_n-\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n$①，

所以 $S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-\frac{3}{2}(n+1)^2+\frac{3}{2}(n+1)$②，…………………………………………（1分）

②－①得 $a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n-3n$，

整理得 $a_{n+1}-a_n=3$，…………………………………………（3分）

由等差数列的定义可知$\{a_n\}$是等差数列. …………………………………………（4分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$\{a_n\}$的公差 $d=3$，

又因为 $a_1=2$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-1$. …………………………………………（6分）

若选①：

$b_n=\frac{1}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2}}=\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1})(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})}=\frac{1}{3}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})$，…（8分）

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{1}{3}[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{8}-\sqrt{5})+(\sqrt{11}-\sqrt{8})+\cdots+(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})]$

$=\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}}{3}$. …………………………………………（10分）

若选②：

$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$，…………………………………………（8分）

所以 $T_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{n}{2(3n+2)}$. …………………………………………（10分）

若选③：

$b_n=2^na_n=(3n-1)\cdot 2^n$，

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2\times 2^1+5\times 2^2+8\times 2^3+\cdots+(3n-1)\times 2^n$，

则 $2T_n=2\times 2^2+5\times 2^3+8\times 2^4+\cdots+(3n-1)\times 2^{n+1}$，…………………………………………（7分）

两式作差得 $-T_n=2\times 2^1+3\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+3\times 2^n-(3n-1)\times 2^{n+1}$

$=4+\frac{12(1-2^{n-1})}{1-2}-(3n-1)\times 2^{n+1}=-8+(4-3n)\times 2^{n+1}$. …………………………………………（9分）

所以 $T_n=8+(3n-4)\times 2^{n+1}$. …………………………………………（10分）

18. **命题意图** 本题考查解三角形.

解析 （Ⅰ）由条件和正弦定理得$\sqrt{3}\sin B=\sin C(\sqrt{3}\cos A+\sin A)$，…………………………………………（1分）

所以$\sqrt{3}\sin(A+C)=\sin C(\sqrt{3}\cos A+\sin A)$，

展开后整理得$\sqrt{3}\sin A\cos C=\sin C\sin A$. …………………………………………（3分）

因为 $\sin A\neq 0$，所以$\sqrt{3}\cos C=\sin C$，所以 $\tan C=\sqrt{3}$，…………………………………………（4分）

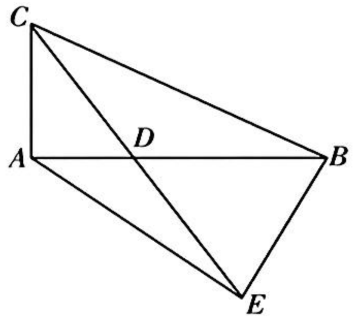
又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………（5分）

（Ⅱ）如图所示，因为 $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，$AC=3$，所以 $AB=3\sqrt{3}$，

又因为 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线，所以 $AD=\sqrt{3}$，$CD=DB=2\sqrt{3}$. …………………………………………（6分）

因为$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CD}$,所以在$\triangle BDE$中,$DB=DE=2\sqrt{3}$,

又$\angle BDE=\frac{\pi}{3}$,所以$\triangle BDE$为等边三角形,所以$BE=2\sqrt{3}$. …………………………………………(8 分)



在$\triangle ADE$中,由余弦定理可得$AE^2=AD^2+DE^2-2AD\times DE\times\cos\frac{2\pi}{3}=21$,即$AE=\sqrt{21}$,……………… (10 分)

在$\triangle ABE$中,由正弦定理可得$\frac{AB}{\sin\angle AEB}=\frac{AE}{\sin\angle ABE}$,

即$\frac{3\sqrt{3}}{\sin\angle AEB}=\frac{\sqrt{21}}{\sin\frac{\pi}{3}}$,得$\sin\angle AEB=\frac{3\sqrt{21}}{14}$. ……………………………………………………(12 分)

19. **命题意图** 本题考查空间垂直关系的证明,以及利用空间向量计算二面角.

解析 (Ⅰ)如图,连接A_1B,与AB_1相交于点F,连接CF,A_1C.

因为四边形AA_1B_1B为菱形,所以F为AB_1的中点,且$BF\perp AB_1$. ………………………………………(1 分)

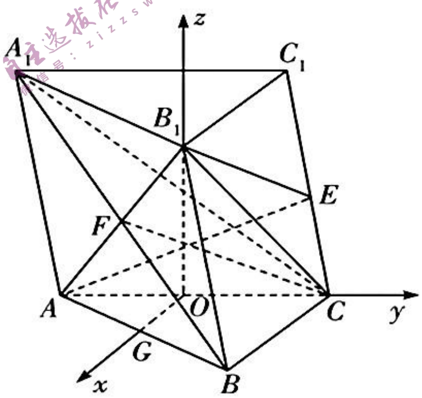
因为$\triangle AB_1C$为等边三角形,所以$CF\perp AB_1$. ……………………………………………………………(2 分)

因为$BF\cap CF=F$,所以$AB_1\perp$平面A_1BC. ……………………………………………………………(3 分)

因为$BC\subset$平面A_1BC,所以$AB_1\perp BC$. ……………………………………………………………………(4 分)

因为$B_1C_1/\!/BC$,所以$AB_1\perp B_1C_1$. …………………………………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)设AC,AB的中点分别为O,G,连接B_1O,OG.



由(Ⅰ)可知$AB_1\perp BC$,又$AC\perp BC$,$AB_1\cap AC=A$,

所以$BC\perp$平面AB_1C.

因为$OG/\!/BC$,所以$OG\perp$平面AB_1C,

因为$\triangle AB_1C$为等边三角形,所以$B_1O\perp AC$. …………………………………………………………(6 分)

以O为坐标原点,$\overrightarrow{OG}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OB_1}$的方向分别为x轴、y轴、z轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,

……(7 分)

则 $A(0,-2,0)$, $C(0,2,0)$, $B(3,2,0)$, $B_1(0,0,2\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{AB}=(3,4,0)$, $\overrightarrow{BC}=(-3,0,0)$,

由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$, 得 $A_1(-3,-4,2\sqrt{3})$, $C_1(-3,0,2\sqrt{3})$, $E\left(-\frac{3}{2},1,\sqrt{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{3}{2},3,\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AA_1}=(-3,-2,2\sqrt{3})$.

设平面 AA_1B_1B 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3x_1+4y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-3x_1-2y_1+2\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=3$, 得 $\boldsymbol{n}=(-4,3,-\sqrt{3})$. ……………………………… (9 分)

设平面 AB_1E 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=-\frac{3}{2}x_2+3y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2y_2+2\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=\sqrt{3}$, 得 $\boldsymbol{m}=(-4,-3,\sqrt{3})$. ……………………………… (10 分)

设平面 AA_1B_1B 与平面 AB_1E 的夹角为 θ,

所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{|16-9-3|}{\sqrt{16+9+3}\times\sqrt{16+9+3}}=\frac{1}{7}$,

即平面 AA_1B_1B 与平面 AB_1E 夹角的余弦值为 $\frac{1}{7}$. ……………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查线性回归模型的应用.

解析 (Ⅰ) $y=c\ln x+d$ 能更好地对 y 与 x 的关系进行拟合. ……………………………… (1 分)

设 $z=\ln x$, 先求 y 关于 z 的线性回归方程.

由已知得 $\bar{z}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}z_i=5.4$,

所以 $c=\frac{\sum_{i=1}^{5}z_iy_i-5\bar{z}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}z_i^2-5\bar{z}^2}\approx\frac{12.7-5\times5.4\times0.5}{147.4-5\times5.4^2}=-0.5$, ……………………………… (3 分)

$d=\bar{y}-c\bar{z}=0.5-(-0.5)\times5.4=3.2$, ……………………………… (4 分)

所以 y 关于 z 的线性回归方程为 $y=-0.5z+3.2$, ……………………………… (5 分)

所以 y 关于 x 的回归方程为 $y=-0.5\ln x+3.2$. ……………………………… (6 分)

(Ⅱ) 设该剧场的总座位数为 M, 由题意得门票收入为 $Mxy=M(-0.5x\ln x+3.2x)$. ……………… (7 分)

设函数 $f(x)=-0.5x\ln x+3.2x$, 则 $f'(x)=-0.5\ln x+2.7$, ……………………………… (8 分)

当 $f'(x)<0$, 即 $x>e^{5.4}$ 时, 函数单调递减, 当 $f'(x)>0$, 即 $0<x<e^{5.4}$ 时, 函数单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x=e^{5.4}\approx220$ 处取最大值, ……………………………… (11 分)

所以预测票价为 220 元时, 剧场的门票收入最多. ……………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查椭圆的性质, 椭圆与直线的位置关系.

解析 (Ⅰ) 由椭圆的对称性可知点 M_1 和 M_2 在 C 上,

代入方程得 $\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$. ……………………………… (2 分)

设 C 的半焦距为 $c(c>0)$，则离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=\sqrt{2}c$，$b=c$， ………………………………（3 分）

所以 $a=\sqrt{2}b$，解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=2$. ………………………………（4 分）

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB：$x-my-2=0(m\neq\pm1)$. ………………………………（6 分）

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\\ x-my-2=0,\end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2+2)y^2+4my-4=0$，

所以 $y_1+y_2=\frac{-4m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-4}{m^2+2}$.（*）………………………………（7 分）

设点 $P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$.

由题可知 $E(0,2)$，所以直线 EA 的方程为 $y-2=\frac{y_1-2}{x_1}x$，

由 $y-2=\frac{y_1-2}{x_1}x$ 与 $x-y-4=0$ 联立得 $x_P=\frac{6x_1}{x_1-y_1+2}=\frac{6(my_1+2)}{(m-1)y_1+4}$， ………………………………（8 分）

同理可得 $x_Q=\frac{6(my_2+2)}{(m-1)y_2+4}$.

$$\text{所以}|PQ|=\sqrt{2}|x_P-x_Q|=\sqrt{2}\left|\frac{6(my_1+2)}{(m-1)y_1+4}-\frac{6(my_2+2)}{(m-1)y_2+4}\right|$$

$$=12\sqrt{2}\left|\frac{(m+1)(y_1-y_2)}{(m-1)^2y_1y_2+4(m-1)(y_1+y_2)+16}\right|$$

$$=12\sqrt{2}\left|\frac{(m+1)\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}}{(m-1)^2y_1y_2+4(m-1)(y_1+y_2)+16}\right|.$$

将（*）代入上式整理得 $|PQ|=\frac{24\sqrt{m^2+1}}{|m-7|}$. ………………………………（9 分）

因为点 $E(0,2)$ 到直线 $x-y-4=0$ 的距离 $d=\frac{|0-2-4|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle EPQ}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{24\sqrt{m^2+1}}{|m-7|}=\frac{36\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{|m-7|}$. ………………………………（10 分）

设 $m-7=t$，则 $m=t+7$，

所以 $S_{\triangle EPQ}=\frac{36\sqrt{2}\sqrt{(t+7)^2+1}}{|t|}=36\sqrt{2}\sqrt{\frac{(t+7)^2+1}{t^2}}=36\sqrt{2}\times\sqrt{50\left(\frac{1}{t}+\frac{7}{50}\right)^2+\frac{1}{50}}$，

当 $\frac{1}{t}=-\frac{7}{50}$，即 $m=-\frac{1}{7}$ 时，$(S_{\triangle EPQ})_{\min}=\frac{36}{5}$. ………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 （Ⅰ）依题意得 $f'(x)=(x+2)e^x+2m(x+2)=(x+2)(e^x+2m)$. ………………………………（1 分）

①当 $m\geqslant0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $x<-2$，令 $f'(x)>0$，得 $x>-2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增； ………………………………（2 分）

②当 $-\frac{1}{2e^2}<m<0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $\ln(-2m)<x<-2$，令 $f'(x)>0$，得 $x<\ln(-2m)$ 或 $x>-2$，

所以$f(x)$在$(\ln(-2m),-2)$上单调递减,在$(-\infty,\ln(-2m))$和$(-2,+\infty)$上单调递增; …………(3 分)

③当$m=-\dfrac{1}{2e^2}$时,$f'(x)\geqslant 0$在$\mathbf{R}$上恒成立,所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增; ……………………………(4 分)

④当$m<-\dfrac{1}{2e^2}$时,令$f'(x)<0$,得$-2<x<\ln(-2m)$,令$f'(x)>0$,得$x<-2$或$x>\ln(-2m)$,

所以$f(x)$在$(-2,\ln(-2m))$上单调递减,在$(-\infty,-2)$和$(\ln(-2m),+\infty)$上单调递增. …………(5 分)

(Ⅱ)当$x\in[-2,+\infty)$时$f(x-1)\geqslant m(x^2+3x)-e$恒成立,则$xe^{x-1}-m(x-1)+e\geqslant 0$恒成立.

(i)当$x=1$时,不等式即$1+e\geqslant 0$,满足条件. ……………………………………………………(6 分)

(ii)当$x>1$时,原不等式可化为$m\leqslant\dfrac{xe^{x-1}+e}{x-1}$,该式对任意$x\in(1,+\infty)$恒成立.

设$g(x)=\dfrac{xe^{x-1}+e}{x-1}$,则$g'(x)=\dfrac{(x^2-x-1)e^{x-1}-e}{(x-1)^2}$.

设$k(x)=(x^2-x-1)e^{x-1}-e$,则$k'(x)=(x^2+x-2)e^{x-1}=(x+2)(x-1)e^{x-1}$.

因为$x>1$,所以$k'(x)>0$,所以$k(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,即$g'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

又因为$g'(2)=k(2)=0$,所以$x=2$是$g'(x)$在$(1,+\infty)$上的唯一零点, ……………………………(8 分)

所以当$1<x<2$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(1,2)$上单调递减,当$x>2$时,$g'(x)>0$,$g(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增,

所以当$x\in(1,+\infty)$时,$g(x)_{\min}=g(2)=3e$,所以$m\leqslant 3e$. ……………………………………(9 分)

(iii)当$-2\leqslant x<1$时,原不等式可化为$m\geqslant\dfrac{xe^{x-1}+e}{x-1}$,

此时对于(ii)中的函数$k(x)$,可知当$-2\leqslant x<1$时,$k'(x)\leqslant 0$,

所以$k(x)$在$[-2,1)$上单调递减,且$k(-2)=5e^{-3}-e<0$,

所以当$-2\leqslant x<1$时,$k(x)\leqslant k(-2)<0$,即$g'(x)<0$,所以$g(x)$在$[-2,1)$上单调递减,

所以当$x\in[-2,1)$时,$g(x)_{\max}=g(-2)=\dfrac{2e^{-3}-e}{3}$,所以$m\geqslant\dfrac{2e^{-3}-e}{3}$. ……………………(11 分)

综上所述,m的取值范围是$\left[\dfrac{2e^{-3}-e}{3},3e\right]$. ……………………………………………(12 分)