第四届陈省身杯全国高中数学奥林匹克解答

1. 因为$\angle DAC=\angle EBD=\angle DFC$,所以,$A$、$D$、$C$、$F$四点共圆,设该圆为$\odot O_1$.

由$MC^2=MB^2=MA\cdot MD$,知MC与$\odot O_1$切于点C.

因为$BE/\!/CF$,所以,G是$\odot O$与$\odot O_1$的一个位似中心.

又AD是$\odot O$与$\odot O_1$的公共弦,于是,点G在AD的中垂线OO_1上.

故$GA=GD$.

2. 由方程①、②知其公共根为$p=\dfrac{b-c}{b-a}$.

类似地,方程②、③,方程①、③的公共根分别为$q=\dfrac{c-a}{c-b}$,$r=\dfrac{a-b}{a-c}$.

于是,$pqr=-1$.

若p、q、r中有两个相等,不妨设$p=q$,则三个方程有公共根p. 于是,

$$p=r\Rightarrow p=r=q=-1\Rightarrow a=b=c,$$

矛盾.

下设p、q、r互异. 则三个方程有形式

$(x-p)(x-r)=0$,

$(x-p)(x-q)=0$,

$(x-q)(x-r)=0$.

于是,$a=-p-r=qr$,$b=-q-p=rp$,$c=-r-q=pq$.

故$-2(p+q+r)=pq+qr+rp$,

$$-1=(q+1)(p+1)(r+1)$$
$$=pq+qr+rp+p+q+r.$$

于是,$p+q+r=1$,$pq+qr+rp=-2$.

则$a^2+b^2+c^2$
$$=2(p^2+q^2+r^2+pq+qr+rp)=6.$$

3. 记$x_n=[n\sqrt{2}]$. 显然,

$$x_{n+1}=[n\sqrt{2}+\sqrt{2}]\geqslant[n\sqrt{2}+1]=x_n+1,$$

且 $x_{n+1}=[n\sqrt{2}+\sqrt{2}]\leqslant[n\sqrt{2}+2]=x_n+2$,

即 $x_{n+1}-x_n=1$或2.

假设集合$X=\{[n\sqrt{2}]\mid n\in\mathbf{N}_+\}$中只有有限个元素,其个位数字为$a$. 则存在$M\in\mathbf{N}_+$,使得当$n\geqslant M$时,$x_n=[n\sqrt{2}]$的个位数字均不为$a$.

由$x_{n+1}-x_n=1$或2,并结合$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$,知存在$n\geqslant M$,使得

$$x_n=10k+a+1\ (k\in\mathbf{N}_+).$$

由$x_{n+7}=[n\sqrt{2}+7\sqrt{2}]$
$$\geqslant[n\sqrt{2}+9]=x_n+9,$$
$$x_{n+7}=[n\sqrt{2}+7\sqrt{2}]\leqslant[n\sqrt{2}+10]=x_n+10,$$

故只能$x_{n+7}=x_n+10=10(k+1)+a+1$.

类似地,

$x_{n+14}=x_{n+7}+10=10(k+2)+a+1$,

$\cdots$,

$x_{n+70}=x_{n+63}+10=10(k+10)+a+1$.

由$70^2\times2=9\ 800<9\ 801=99\times99$,知

$$x_{n+70}=[n\sqrt{2}+70\sqrt{2}]$$
$$\leqslant[n\sqrt{2}+99]=10(k+10)+a,$$

矛盾.

因此,集合$X=\{[n\sqrt{2}]\mid n\in\mathbf{N}_+\}$中有无穷多个元素,其个位数字为$a$.

4. 将圆桌旁2 013人顺时针依次记为$A_0,A_1,\cdots,A_{2n}$($n=1\ 006$). 设A_i手中持有$a_i+(n+1)$张卡片. 则$(a_0,a_1,\cdots,a_{2n})$是$(-n,-n+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,n)$的一个排列,且$\sum\limits_{i=0}^{2n}a_i=0$.

设所有传递结束后,A_{i+1}传给A_i($i=0,1,\cdots,2n$,$A_{2n+1}=A_0$)共x_i张卡片(若$x_i<0$,

表示 A_i 传给 A_{i+1} 的卡片 $-x_i$ 张).

由题设知

$$x_i+a_i-x_{i-1}=0$$

$$\Rightarrow x_i=x_{i-1}-a_i=\cdots=x_{2n}-\sum_{j=0}^{i}a_j. \qquad ①$$

特别地, $x_{2n}=x_{2n}-\sum\limits_{j=0}^{2n}a_j$.

故所有传递次数之和为

$$A=\sum_{i=0}^{2n}|x_i|=\sum_{i=0}^{2n}\left|x_{2n}-\sum_{j=0}^{i}a_j\right|.$$

将 $\sum\limits_{j=0}^{i}a_j(i=0,1,\cdots,2n)$ 按从小到大重新排列为 $b_0,b_1,\cdots,b_{2n}$. 则存在 $i_0\in\{0,1,\cdots,2n\}$, 使得 $b_n=\sum\limits_{j=0}^{i_0}a_j$.

$$\begin{aligned}故\ A&=\sum_{i=0}^{2n}|x_{2n}-b_i|\\&=|x_{2n}-b_n|+\sum_{i=0}^{n-1}(|x_{2n}-b_i|+|b_{n+1+i}-x_{2n}|)\\&\geqslant\sum_{i=0}^{n-1}(b_{n+1+i}-b_i),\end{aligned}$$

当且仅当 $x_{2n}=b_n$ 时, A 取最小值.

此时, $x_i(i=0,1,\cdots,2n-1)$ 由 x_{2n} 及式①唯一确定.

特别地, $x_{i_0}=x_{2n}-\sum\limits_{j=0}^{i_0}a_j=b_n-\sum\limits_{j=0}^{i_0}a_j=0$, 表示 A_{i_0} 与 A_{i_0+1} 之间始终没有传递卡片.

5. 如图 1, 联结 BD、CD.

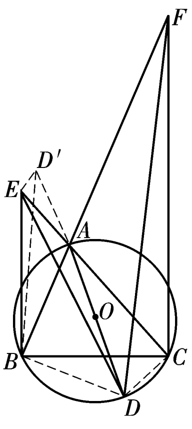

图 1

则 $\angle DBF=\angle DCE=90°$,

且 $$\frac{BF}{CE}=\frac{\dfrac{BC}{\cos\angle CBF}}{\dfrac{BC}{\cos\angle BCE}}=\frac{\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{CD}.$$

故 $\triangle DBF\backsim\triangle DCE$

$\Rightarrow\angle BDF=\angle CDE$

$\Rightarrow\angle BDE=\angle CDF$.

因为 $BE\parallel CF$, 所以, A 是线段 CF 与 EB 的一个位似中心. 设点 D 关于此位似变换的对应点为 D'. 则

$\angle BDE=\angle FDC=\angle BD'E$.

于是, B、D、D'、E 四点共圆.

故 $\angle ADF=\angle AD'B=\angle BD'D=\angle BED$.

6. 由 $f(x^2)-x^3$、$f(x^3)-x^4$ 严格单调递增, 知 $f(x^{30})-x^{45}$、$f(x^{30})-x^{40}$ 均严格单调递增. 故对正数λ(待定), 有

$$\frac{(f(x^{30})-x^{45})+\lambda(f(x^{30})-x^{40})}{1+\lambda}=f(x^{30})-\frac{x^{45}+\lambda x^{40}}{1+\lambda}$$

严格单调递增.

另一方面, 结论等价于 $f(x^{30})-\dfrac{100}{101}x^{42}$ 严格单调递增.

$$\begin{aligned}而\ &f(x^{30})-\frac{100}{101}x^{42}\\&=f(x^{30})-\frac{x^{45}+\lambda x^{40}}{1+\lambda}+\\&\quad\frac{1}{1+\lambda}\left(x^{45}+\lambda x^{40}-\frac{100}{101}(1+\lambda)x^{42}\right),\end{aligned}$$

故只需证

$$F(x)=x^{45}+\lambda x^{40}-\frac{100}{101}(1+\lambda)x^{42}$$

严格单调递增即可.

注意到,

$$F'(x)=45x^{44}+40\lambda x^{39}-\frac{4\,200}{101}(1+\lambda)x^{41}>0$$

$$\Leftrightarrow 9x^5+8\lambda>\frac{840}{101}(1+\lambda)x^2.$$

而 $9x^5+8\lambda=\frac{9x^5}{2}\times2+\frac{8\lambda}{3}\times3$

$\geqslant5\sqrt[5]{\left(\frac{9x^5}{2}\right)^2\left(\frac{8\lambda}{3}\right)^3}=10\sqrt[5]{12\lambda^3}x^2$,

故只需取正数λ满足

$\sqrt[5]{12\lambda^3}>\frac{84}{101}(1+\lambda)$

$\Leftrightarrow\frac{101}{84}\times12^{\frac{1}{5}}>\lambda^{\frac{2}{5}}+\lambda^{-\frac{3}{5}}$.

而$\lambda^{\frac{2}{5}}+\lambda^{-\frac{3}{5}}=\frac{\lambda^{\frac{2}{5}}}{3}\times3+\frac{\lambda^{-\frac{3}{5}}}{2}\times2$

$\geqslant5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5}{\sqrt[5]{108}}$,

故取$\lambda=\frac{3}{2}$,上式等号成立. 此时,只需证

$\frac{101}{84}\times12^{\frac{1}{5}}>\frac{5}{\sqrt[5]{108}}\Leftrightarrow\sqrt[5]{12\times108}>\frac{420}{101}$

$\Leftrightarrow\frac{16}{3}>\left(\frac{140}{101}\right)^5\Leftrightarrow101^5>6\times7^5\times10^5$

$\Leftrightarrow101^5=(100+1)^5>10^{10}+5\times10^8$

$>1.00842\times10^{10}=6\times7^5\times10^5$.

7. 设 $d(n)$是 n 的所有正因子的个数.

对大于 7 的素数 p,由费马小定理知

$5\mid(p^4-1),7\mid(p^6-1)\Rightarrow35\mid(p^{12}-1)$.

设 $p=2k+1$. 由二项式定理得

$(2k+1)^{12}-1$

$\equiv C_{12}^3(2k)^3+C_{12}^2(2k)^2+C_{12}^1 2k$

$\equiv66\times4k^2+24k\equiv24k(11k+1)$

$\equiv0(\bmod 2^4)$

$\Rightarrow2^4\mid(p^{12}-1)$.

设 $p=3k+r(r\in\{1,2\})$. 则

$(3k+r)^{12}-1\equiv C_{12}^1 3kr^{11}+r^{12}-1$

$\equiv r^{12}-1\equiv0(\bmod 3^2)$

$\Rightarrow3^2\mid(p^{12}-1)$.

综上,$(2^4\times3^2\times5\times7)\mid(p^{12}-1)$.

故 $p^{12}+5\,039\times5\,041=p^{12}-1+5\,040^2$ 为5 040 的倍数.

令 $p^{12}+5\,039\times5\,041=5\,040k$. 则 $k\geqslant5\,041$.

设 $k=2^s\times3^t\times5^u\times7^v w(s、t、u、v、w\in\mathbf{N},(w,210)=1)$.

则 $d(p^{12}+5\,039\times5\,041)$

$=(5+s)(3+t)(2+u)(2+v)d(w)$.

若 $w>1$,则

$d(p^{12}+5\,039\times5\,041)$

$\geqslant5\times3\times2\times2\times2=120$,

矛盾.

若 $w=1$,则

$d(p^{12}+5\,039\times5\,041)$

$=(5+s)(3+t)(2+u)(2+v)<120$

$\Rightarrow s\leqslant4,t\leqslant2,u\leqslant1,v\leqslant1$

$\Rightarrow k\leqslant2^4\times3^2\times5\times7<5\,041$,

矛盾.

从而,不存在大于 7 的素数 p 满足题设.

8. $c_{\max}=2n$.

例子如下:取数表中第 i 行、第 j 列处的数为

$$a_{ij}=\begin{cases}0, & 1\leqslant i、j\leqslant2n \text{ 或 } 2n+1\leqslant i、j\leqslant4n;\\ 1, & 1\leqslant i\leqslant2n,2n+1\leqslant j\leqslant4n;\\ -1, & 2n+1\leqslant i\leqslant4n,1\leqslant j\leqslant2n.\end{cases}$$

下面假设每行每列各数的和的绝对值均大于 $2n$.

设有 $2n+x$ 列的数和为正(称为正和列),$2n-x$ 列的数和为负(称为负和列),其中,$|x|\leqslant2n-1$;$2n+y$ 行的数和为正(称为正和行),$2n-y$ 行的数和为负(称为负和行),其中,$|y|\leqslant2n-1$.

则所有正和列中各数的和

$u>2n(2n+x)$,

所有负和列中各数的和的绝对值

$|-u|>2n(2n-x)$.

因此,$u>2n(2n+|x|)$.

类似地,所有正和行中的各数的和

$v>2n(2n+|y|)$.

令 a 表示正和行与正和列的交集中各数之和,b 表示正和列与负和行的交集中各数之和,c 表示负和列与负和行的交集中各数

之和. 则

$$a+b=u, b+c=-v$$

$$\Rightarrow a-c=u+v>2n(4n+|x|+|y|).$$

另一方面,

$$a-c\leqslant(2n+x)(2n+y)+(2n-x)(2n-y)$$

$$=8n^2+2xy.$$

故 $|xy|\geqslant xy>n(|x|+|y|)$, 得

$$(|x|-n)(|y|-n)>n^2,$$

矛盾.