

吉林省“BEST 合作体”2022-2023 学年度下学期期末考试 高二数学试题

本试卷满分 150 分，共 5 页。考试时间为 120 分钟，考试结束后，只交答题卡。

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，计 60 分，1-8 题为单选，9-12 题为多选，少选得 2 分，错选或不选得 0 分，）

1. 设集合 $M = \{x | 4^x < 32\}$ ， $N = \{y | y = \sqrt{x+1}\}$ ，则 $M \cap N = (\quad)$
A. \emptyset B. $\left[0, \frac{5}{2}\right)$ C. $\left[1, \frac{5}{2}\right)$ D. $[1, 5)$
2. 命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - mx + 1 > 0$ ，命题 $q: m < 2$ ，则 p 是 q 的 (\quad)
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
3. 用模型 $y = ce^{kx}$ 拟合一组数据时，为了求出回归方程，设 $z = \ln y$ ，其变换后得到经验回归方程为 $z = 2x + \frac{1}{2}$ ，则 $c = (\quad)$
A. 0.5 B. $e^{0.5}$ C. 2 D. e^2
4. 已知抛物线 $C: y^2 = x$ 的准线为 l ，点 A 的坐标为 $(1, 0)$ ，点 P 在抛物线上，点 P 到直线 l 的距离为 d ，则 $|PA| - d$ 的最大值为 (\quad)
A. 1 B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
5. 李先生的私家车基本上每月需要去加油站加油两次，假定每月去加油时两次的油价略有差异.有以下两种加油方案：
方案一：不考虑两次油价的升降，每次都加油 200 元；
方案二：不考虑两次油价的升降，每次都加油 30 升.
李先生下个月采用哪种方案比较经济划算？ (\quad)
A. 方案一 B. 方案二 C. 一样划算 D. 不能确定
6. 已知 A, B 为双曲线 C 的左、右顶点，点 M 在 C 上， $\triangle ABM$ 为等腰三角形，且顶角为 120° ，则 C 的离心率为 (\quad)
A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D. $\sqrt{2}$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0, \\ |\lg x|, & x > 0, \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - b$ 有四个不同的零点, 则实数 b 的取值范围为 ()

- A. $(0, 1]$ B. $[0, 1]$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

8. 若 $a = \sin 0.1 + \tan 0.1$, $b = 0.2$, $c = 0.16e^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

9. 某课外兴趣小组通过随机调查, 利用 2×2 列联表和 χ^2 统计量研究数学成绩优秀是否与性别有关. 计算得 $\chi^2 = 6.748$, 经查阅临界值表知 $P(\chi^2 > 6.635) = 0.010$, 则下列判断错误的是 ()

- A. 每 100 个数学成绩优秀的人中就会有 1 名是女生
B. 若某人数学成绩优秀, 那么他为男生的概率是 0.010
C. 有 99% 的把握认为“数学成绩优秀与性别有关”
D. 在犯错误的概率不超过 1% 的前提下认为“数学成绩优秀与性别无关”

10. 下列命题中正确的是 ()

- A. 命题: “ $\forall x \geq 0, x^2 \geq 0$ ” 的否定是 “ $\exists x < 0, x^2 < 0$ ”
B. 函数 $f(x) = a^{x-4} + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 恒过定点 $(4, 2)$
C. 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 则函数 $f(x^2+2)$ 的定义域为 $[-1, 1]$
D. 函数 $y = \sqrt{mx^2 + (m-3)x + 1}$ 的值域是 $[0, +\infty)$, 则实数 m 的范围是 $[0, 1] \cup [9, +\infty)$

11. 一个袋子中装有除颜色外完全相同的 10 个球, 其中有 6 个黑球, 4 个白球, 现从中任取 4 个球, 记随机变量 X 为取出白球的个数, 随机变量 Y 为取出黑球的个数, 若取出一个白球得 2 分, 取出一个黑球得 1 分, 随机变量 Z 为取出 4 个球的总得分, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $P(X=1) = \frac{1}{2}$ B. $X+Y=4$ C. $E(X) > E(Y)$ D. $E(Z) = \frac{28}{5}$

12. 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $xf'(x) < f(x)$, 函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 满足:

$g(x+1)$ 为奇函数, 且对于定义域内的所有实数 x , 都有 $g(4-x) = g(x)$. 则 ()

- A. $g(x)$ 是周期为 2 的函数 B. $g(x)$ 为偶函数
C. $g\left(-\frac{33}{2}\right) > g(2023) > g(e)$ D. $g(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，计 20 分）

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_3 + a_7 = 14$ ， $S_5 = 15$ ，则 $a_4 =$ _____.

14. $(x^2 - x + 1)^5$ 的展开式中， x^5 的系数为 _____.

15. 已知 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 4$ ，则 xy 的最大值是 _____.

16. 在明代珠算发明之前，我们的先祖从春秋开始多是用算筹为工具来记数、列式和计算.算筹实际上是一根根相同长度的小木棍，如图，是利用算筹表示数 1~9 的一种方法，例如：47 可以表示为“|||| |||”，如果用算筹表示一个不含“0”且没有重复数字的三位数，这个数至少要用 8 根小木棍的概率为_____.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

中国古代的算筹数码

三、解答题（本大题共 6 小题，17 题 10 分，18-22 题每题 12 分，计 70 分）

17.（本小题 10 分）在某校举办“青春献礼二十大，强国有我新征程”的知识能力测评中，随机抽查了 100 名学生，其中共有 4 名女生和 3 名男生的成绩在 90 分以上，从这 7 名同学中每次随机抽 1 人在全校作经验分享，每位同学最多分享一次，记第一次抽到女生为事件 A ，第二次抽到男生为事件 B .

(1)求 $P(B)$ ， $P(B|A)$ ，

(2)若把抽取学生的方式更改为：从这 7 名学生中随机抽取 3 人进行经验分享，记被抽取的 3 人中女生的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望.

18. (本小题 12 分) 2023 年, 国家不断加大对科技创新的支持力度, 极大鼓舞了企业投入研发的信心, 增强了企业的创新动能. 某企业在国家一系列优惠政策的大力扶持下, 通过技术革新和能力提升, 极大提升了企业的影响力和市场知名度, 订单数量节节攀升, 下表为该企业今年 1~4 月份接到的订单数量.

月份 t	1	2	3	4
订单数量 y (万件)	5.2	5.3	5.7	5.8

附: 相关系数, $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, 回归方程 $y = \hat{a} + \hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \quad \sqrt{1.3} \approx 1.14.$$

(1) 试根据样本相关系数 r 的值判断订单数量 y 与月份 t 的线性相关性强弱 ($0.75 \leq |r| \leq 1$, 则认为 y 与 t 的线性相关性较强, $|r| < 0.75$, 则认为 y 与 t 的线性相关性较弱). (结果保留两位小数)

(2) 建立 y 关于 t 的经验回归方程, 并预测该企业 5 月份接到的订单数量.

19. (本小题 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 从条件①、条件②这两个条件中选择一个条件作为已知, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_{2n+1} \cdot \log_2 a_{2n+3}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若对任意正整数 n , 不等式 $T_n < \lambda$ 恒成立,

求 λ 的最小值.

条件① $a_2 = a_1 + 2$, 且 $2a_n = a_1 + S_n$; 条件② $\{a_n\}$ 为等比数列, 且满足 $S_n = 2^{n+1} + k$; (注: 若条件①和条件②

分别解答, 按第一个解答计分.)

20. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - a \sin x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = -x$, 求实数 a 的值;

(2) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值;

(3) 若对任意的 $x \in [0, \pi]$, 恒有 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题 12 分) 2023 年 4 月 23 日, 是中国海军成立 74 周年. 74 年向海图强, 74 年劈波斩浪. 74 年, 人民海军新装备不断增加, 新型作战力量加速发展, 从“101 南昌舰”到“108 咸阳舰”, 8 艘 055 型驱逐舰列阵. 我国自主研制的 075 型两栖攻击舰“31 海南舰”“32 广西舰”“33 安徽舰”也相继正式入列. 从小艇到大舰, 从近海防御到挺进深蓝大洋, 人民海军步履铿锵, 捍卫国家主权, 维护世界和平. 为了庆祝中国海军成立 74 周年, 某公司设计生产了三款两栖攻击舰模型 (分别为“31 海南舰”、“32 广西舰”、“33 安徽舰”), 并限量发行. 若该公司每个月发行 300 件 (三款各 100 件), 一共持续 12 个月, 采用摇号的方式进行销售. 假设每个月都有 3000 人参与摇号, 摇上号的将等可能获得三款中的一款. 小周是个“战舰狂热粉”, 听到该公司发行两栖攻击舰模型, 欣喜若狂.

(1) 若小周连续三个月参与摇号, 求他在这三个月集齐三款模型的概率;

(2) 若摇上号的人不再参加后面的摇号. 已知小周从第一个月开始参与摇号, 并且在 12 个月的限量发行中成功摇到并获得了模型. 设他第 X 个月 ($X = 1, 2, \dots, 12$) 摇到并获得了模型, 求 X 的数学期望.

22. (本小题 12 分) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x$, $g(x) = ax - \ln x - 2$.

(1) 当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都存在极小值, 且极小值之和为 0 时, 求实数 a 的值;

(2) 若 $f(x_1) = f(x_2) = 2$ ($x_1 \neq x_2$), 求证: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{2}{a}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线

